

MECCANICA DEL CONTINUO - Prof. Terenzi - I periodo (2/12 - 23/1)

1. EQUAZIONE DEL CALORE
4. POTENZA VIRTUALE
5. EQUAZIONE DI BILANCIO - RELAZIONI COSTITUTIVE
6. LAVORO VIRTUALE
11. ESEMPIO MODELLAZIONE PROBLEMA
13. ANISOTROPIA
16. ATTI DI MUOTO RIGIDO
19. ELASTICITA' NON LINEARE: CONTINUO DI CAUCHY
22. ESEMPIO VELOCITA' TEST

Temina in mod. a elementi finiti - Prof. Terenzi

M. E. Gurtin - Introduction to Continuum Mechanics

Software: COMSOL Multiphysics

Ex:

EQUAZIONE DEL CALORE

1. Variabili di stato \rightarrow Cont. il dom. e il Cosom
2. equazioni di bilancio
3. Ipotesi costitutive

1) Temperatura $[U]$

Simboli:

nome funzione: nome dominio \rightarrow nome Cosominio

nome punto
del dominio \mapsto Valore della
funzione

"Body"

"Time"

$$U: \boxed{B} \times \boxed{T} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(dove e quando)

$$(x, t) \mapsto U(x, t)$$

Le dim. di B \propto del problema. Ex punto, dim. 1 o
Vela, membrana, dim. 2 o cubo di dim. 3.

È importante capire il bordo, ∂B :

dim B ∂B

3

2

2

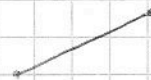
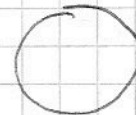
1

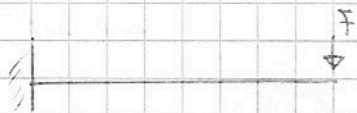
1

0

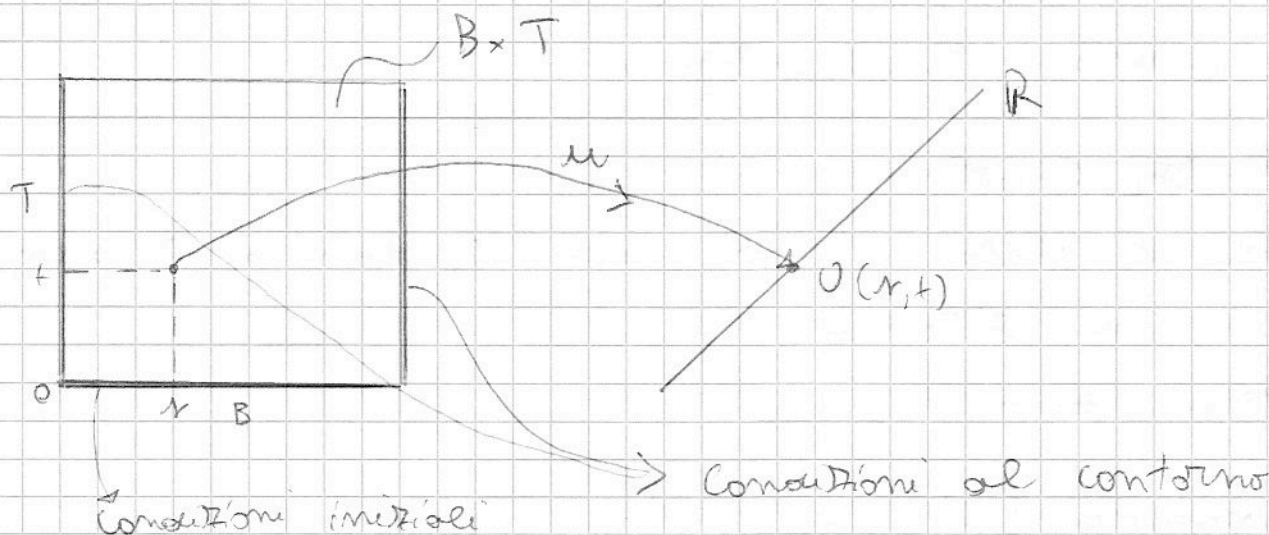
0

-





Corpo di dim 1, eq. integrale del corpo,
Voglio sapere cosa accade ai 2 punti estremi.



2) E' sempre il principio dei lavori virtuali (potenza nulla \forall spostamenti).

$$P(\tilde{U}) = \int_B (q \cdot \dot{\tilde{U}} - g \cdot \nabla \tilde{U} + f \cdot \tilde{U}) + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{U}$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 Potenza Virtuale tasso di variazione temporale flusso sorgente interna sorgente al bordo

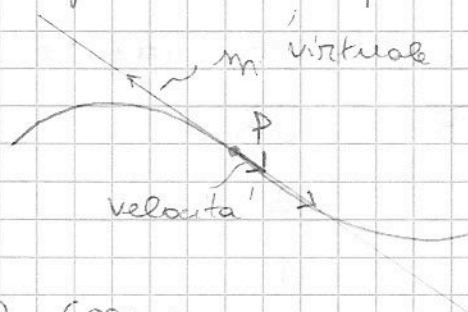
E' una funzione:

$$P: \begin{matrix} \text{spazio} \\ \text{funzionale} \end{matrix} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{U} \mapsto P(\tilde{U})$$

\downarrow variazione virtuale

(dominio e' insieme di funzioni spazio funz.)



lo spost. virtuale e' tangente alla traiettoria, e' da pensare

come una Velocita' Vett. con 2 comp.

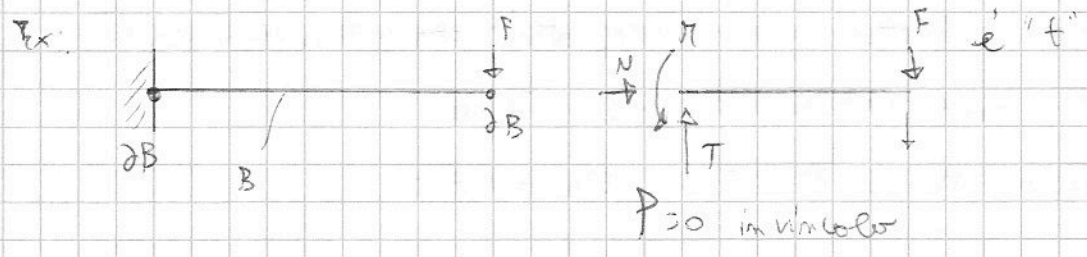
Qui Variaz. di stato e' rilevante e quindi anche lo sp. virt.

② f e' "forza"

Potenza = < azioni dinamiche, derivatori cinematici >

(ex: $F \cdot v$, N "incontrano" ed esce numero, & $\pi \cdot \dot{X}$ ecc)

→ oggetto fondamentale della meccanica.



"t" è lavoro che agisce nel bordo del corpo.

"G" è tensione "v" è deformazione

"q" è la quantità di moto

(nel caso della meccanica dei solidi o fluidi)

Lavoro e Potenza e Energia

$L = \int P$; $P = \dot{E}$ solo se il processo è energetico
 ↓
 definizione

$$L = \int_T P = \int_T \dot{E} = E_{\text{finale}} - E_{\text{iniziale}}$$

o E energia (a volte solo per alcuni

"pezzi" di P, come la cinetica, elastica, potenziale)

$U : B \times T \rightarrow \mathbb{R}$ Variabile di stato (ex $2F^\circ$)
 $\tilde{U} : B \times T \rightarrow \mathbb{R}$ campo test (ex $2F^\circ \pm 3^\circ$)
 $\nabla \tilde{U} : B \times T \rightarrow \mathbb{R}^{\dim B}$ $\nabla \tilde{U} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}$; $\nabla U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \end{pmatrix}$
 $\dot{\tilde{U}} : B \times T \rightarrow \mathbb{R}$

$$P(\tilde{u}) = \int_B (q \cdot \tilde{u} - G \cdot \nabla \tilde{u} + f \cdot \tilde{u}) + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{u}$$

Incognita è u che però non appare esplicitamente
ci vuole Relatz. costitutiva che la lega.

EQUAZIONI DI BILANCIO PER UN PROBLEMA STAZIONARIO

$$P(\tilde{u}) = 0 \quad \forall \tilde{u} \text{ compatibile con i vincoli}$$

Quindi:

$$\int_B (-G \cdot \nabla \tilde{u} + f \cdot \tilde{u}) + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{u} = 0 \quad \forall \tilde{u}$$

è simile a:

\tilde{u} è funzione test
arbitraria.

↓

Devo farti suffire il test; mi dà problema solo $\nabla \tilde{u}$.

$$d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg \rightarrow \text{Regola di Leibniz}$$

Quindi $f \cdot dg = d(fg) - df \cdot g$. Poiché $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$

mi sono prima liberato di $\nabla \tilde{u}$ e
poi di $d(fg)$:

$$\operatorname{div}(G \cdot \tilde{u}) = G \cdot \nabla \tilde{u} + \operatorname{div} G \cdot \tilde{u} \quad (\text{altra modalità della regola di L.})$$

$$G \cdot \nabla \tilde{u} = \operatorname{div}(G \cdot \tilde{u}) - \operatorname{div} G \cdot \tilde{u}$$

$$\int_B (\operatorname{div} G \cdot \tilde{u} - \operatorname{div}(G \cdot \tilde{u}) + f \cdot \tilde{u}) + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{u} \quad \text{Si ha che}$$

$$\textcircled{4} \int_B \operatorname{div}(G \cdot \tilde{u}) = \int_{\partial B} (G \cdot n) \cdot \tilde{u}$$

per convenzione
uscente

↓ normale al bordo

Quindi:

$$\int_B (\operatorname{div} G + f) \cdot \tilde{u} + \int_{\partial B} (t - G \cdot n) \tilde{u} = 0 \quad \forall \tilde{u}^*$$

(matematicamente corretta). Ora ho \tilde{u} esplicita:

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{div} G + f = 0 & \text{in } B \\ G \cdot n = t & \text{in } \partial B \end{array}$$

* \tilde{u} lo prendo come mi pare,
ex 0 in B e 1 in ∂B

PR DI BILANCIO IN FORME DIFFERENZIALE

Se il problema non è stazionario?

$$\int_B (\rho \cdot \dot{\tilde{u}} - G \cdot \nabla \tilde{u} + f \cdot \tilde{u}) + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{u} = 0$$

Una Leibniz e th. divergenza; essendo \tilde{u} indep. al tempo,
integrale indep. al tempo e quindi il LAVORO VIRTUALE
deve essere nullo: $L(\tilde{u}) = \int_T \int_B \dots + \int_T \int_{\partial B} \dots = 0 \quad \forall \tilde{u}$

escono le condizioni iniziali.

Riconf. probl. stazionario.

Variabili di stato:

$$U: B \rightarrow \mathbb{R}$$

Eq. di bilancio

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{div} G + f = 0 & \text{in } B \\ G \cdot n = t & \text{in } \partial B \end{array}$$

Poniamo la RELAZIONE COSTITUTIVA, legame tra variabili di
stato \rightarrow "azioni cinematiche" (cinematica e dinamica)

$$\int_B \underbrace{G}_{\text{cin.}} \cdot \underbrace{\nabla \tilde{u}}_{\text{cin.}}$$

f e t sono i dati in ingresso, G incognita ma voglio u . Voglio informazione su come la dinamica delle var. di stato.

G è flusso, sente le "differenze" di temperatura. Poi è importante il materiale: $G = k \nabla u$ [rel. lineare]
 k è tenore. (conduttività termica)

$$\begin{array}{c|ccc|c} G_1 & & k_{11} & k_{12} & k_{13} & \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ G_2 & = & k_{21} & k_{22} & k_{23} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ G_3 & & k_{31} & k_{32} & k_{33} & \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{array} \quad \text{è notanza, corpo.}$$

Potenza Uera: $P = \int_B -G \cdot \nabla u = \int_B -k \nabla u \cdot \nabla u$

[ex molla: $f=kx$ e $E = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow \dot{E} = k x \dot{x} = f \dot{x}$]

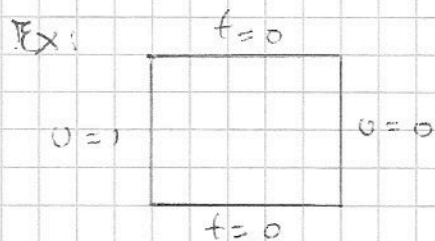
$$E = \frac{1}{2} k \cdot \underbrace{\nabla u}_{\text{vel.}} \cdot \underbrace{\nabla u}_{\text{vel.}} \quad ; \quad \dot{E} = \frac{1}{2} K (\nabla u \cdot \nabla u + \nabla u \cdot \nabla u) =$$

$$= \frac{1}{2} (k^T \nabla u + k \nabla u) \cdot \nabla u \quad (\text{veloc. e dinamica ora separate})$$

Se k è simmetrico, $k^T = k$ e quindi ho $k \nabla u \cdot \nabla u$
 (come nella molla) $\Rightarrow k$ ha 6 comp. diverse.

Se $k = c \text{Id}$, il materiale è omogeneo

Se $k = k \text{Id}$ " " " isotropo



$$\text{div } G = 0$$

$$G \cdot n = 0 \quad (\text{topia / sotto})$$

$$u=1, \quad u=0 \quad (\text{sinistra / destra})$$

Corpo quadrato, no flusso di calore da sotto a sopra (bordo "isolato"). Risolvi (ovvero trova u), seziona il quadrato e disegna. Sol. è unica.

$$\mathcal{L}(\tilde{u}) = \int_0^T \int_B \dot{q} \cdot \tilde{u} - G \cdot \nabla \tilde{u} + f \cdot \tilde{u} + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{u} - \int_{\partial T} \bar{q} \cdot \tilde{u} = 0 \quad \forall \tilde{u}$$

Dominio: $B \times T$

Border: $\partial(B \times T) = \partial B \times T \cup B \times \partial T$

Devo liberare \tilde{u} spostando le derivate: LEIBNIZ ovvero

$(q \cdot \tilde{u})' = \dot{q} \cdot \tilde{u} + q \cdot \dot{\tilde{u}}$ e th. DIVERGENZA, cioè:

$$\int_0^T (q \cdot \tilde{u})' = (q \cdot \tilde{u})_T - (q \cdot \tilde{u})_0$$

$$\int_0^T \int_B \dot{q} \cdot \tilde{u} = \int_0^T \int_B (q \cdot \tilde{u})' - q \cdot \tilde{u} = \int_0^T \int_B -\dot{q} \cdot \tilde{u} + \int_{\partial T} \bar{q} \cdot \tilde{u} =$$

$$= \int_0^T \int_B -\dot{q} \cdot \tilde{u} + \int_B q \cdot \tilde{u} \Big|_T - \int_B q \cdot \tilde{u} \Big|_0 \quad \text{Quindi:}$$

$$\int_0^T \int_B \dot{q} \cdot \tilde{u} = \int_0^T \int_B -G \cdot \nabla \tilde{u} + f \cdot \tilde{u} + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{u} + \int_B (q - \bar{q}) \cdot \tilde{u} \Big|_T +$$

$$\int_B (q - \bar{q}) \cdot \tilde{u} \Big|_0 = 0 \quad \forall \tilde{u} \quad (\text{modo "standard" di risolvere l'eq.})$$

EQUAZIONI DI BILANCIO IN FORMA LOCALE (DIFFERENZIALE; EQ. INDEFINITE DI EQUILIBRIO)

$$\dot{q} = \text{div } G + f \quad \text{in } B \times T$$

$$G \cdot n = t \quad \text{in } \partial B \times T$$

$$q = \bar{q} \quad \text{in } B \times \{0\}$$

Di solito so le cond. iniziali e Voglio l'evoluzione

Ex: Trave elastica (simile al tempo, monodimensionale)

$$\begin{array}{c} f \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sum f = 0 \\ \sum m = 0 \end{array} \right\} \text{sempre!} \quad \text{Qui no, prob.}$$

non ha senso; devo applicare $N = fL$ all'estremo
x bilanciata.

Im genere in T finale sono vincolato, non posso
assegnare condizione (deve essere equilibrio) Ex:

$\parallel \rightarrow F$ (non posso dire cosa c'è all'incastro,
non lo scelgo io ma il bilanciatore mi dice che è $-F$) \Rightarrow
non posso scegliere arbitrariamente $\int_B (q - \bar{q}) \cdot \tilde{u}$ se
già ho scelto $\int_B (q - \bar{q}) \tilde{u}$.

f, t, \bar{q} sono i dati del problema, q e G le incognite

ANALISI DIMENSIONALE

$$P(\tilde{u}) = \int_B q \cdot \tilde{u} - G \cdot \nabla \tilde{u} + f \cdot \tilde{u} + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{u}$$

$$[P] = P \cdot \Theta \quad (\text{potenza} \times \text{temperatura})$$

$$[\tilde{u}] = \Theta \quad (\text{sempre da eq. calore})$$

$$[\nabla \tilde{u}] = \Theta / L$$

$$[\ddot{u}] = \Theta / T$$

$$P \cdot \Theta = [q] \frac{\Theta}{T} dV \Rightarrow [q] = \frac{P \cdot T}{V} = \frac{F}{dV} \quad (\text{densità di energia})$$

$$P \cdot \Theta = [G] \frac{\Theta}{L} dV \Rightarrow [G] = \frac{P}{dV/L} \quad (\text{flusso [di calore]})$$

$$P \cdot \Theta = [f] \cdot \Theta \cdot \Delta V \Rightarrow [f] = \frac{P}{\Delta V}$$

$$P \cdot \Theta = [t] \cdot \Theta \cdot \Delta A \Rightarrow [t] = \frac{P}{\Delta A} \quad (\text{flusso, stesso dim.})$$

RELAZIONI COSTITUTIVE

Dinamica $[q \text{ e } G]$ come α dalla cinematica $[u]$

$$q = \rho C_p \cdot U \rightarrow \text{densità di energia (termica)}$$

$$G = k \nabla u \rightarrow \text{flusso (in realtà } \times \text{ conversione il flusso di calore e } -G)$$

C_p : capacità termica specifica $[C := \rho C_p \rightarrow \text{cap. termica}]$

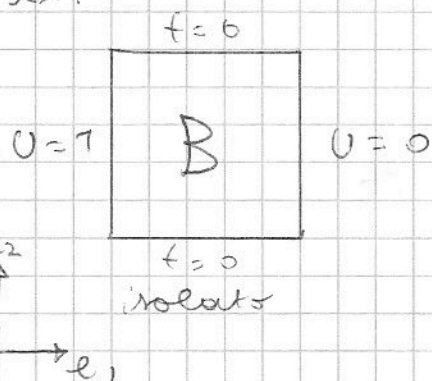
k : conducibilità " $\rightarrow \times \text{ cm su mano}$

La variazione di energia (\dot{q}) è \times ke' che è qualcosa che è prodotto (f) e qualcosa che esce $(\text{div } G)$.

$$G = k \nabla u \rightarrow \frac{P}{\Delta V / L} = [k] \frac{\Theta}{L} \rightarrow [k] = \frac{P}{L} \cdot \frac{1}{\Theta} = \frac{P}{\Delta V / L^2} \cdot \frac{1}{\Theta}$$

$$[C] = \frac{P}{\Delta V} \cdot \frac{1}{\Theta}$$

Ex:



Prob. Matematico

Usiamo eq. integrale (metodo elem. finiti). $C \cdot \dot{u} = \text{div}(k \nabla u) + f$

$$\int_B q \cdot \tilde{u} = \int_B -G \cdot \nabla \tilde{u} + \int_B f \cdot \tilde{u} + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{u} = 0 \quad \nabla \tilde{u} + \text{CI}$$

Qui $0 = \int_B -G \cdot \nabla \tilde{u} + 0 + 0$ [ai bordi o e' $t=0$ o e' 0 la variazione di temp.]

$$\int_B -G \cdot \nabla \tilde{u} = 0 \quad \forall u$$

↓

$$-(G_1 * \text{test}(u_x) + G_2 * \text{test}(u_y)) \quad \forall \tilde{u} \quad [\text{in course } \sim = \text{"test"}]$$

o vero $\begin{vmatrix} G_1 \\ G_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial \tilde{u} / \partial x \\ \partial \tilde{u} / \partial y \end{vmatrix}$

Dobbiamo ancora applicare $G = k \nabla u$ oia $\begin{vmatrix} G_1 \\ G_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \end{vmatrix}$

cioè $G_1 = k_{11} * u_x + k_{12} * u_y$

$G_2 = k_{12} * u_x + k_{22} * u_y$

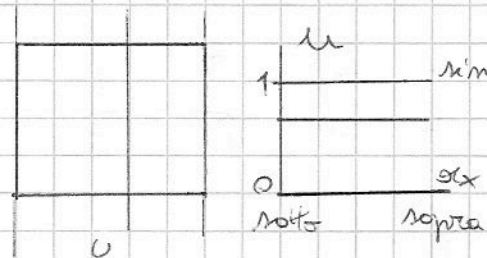
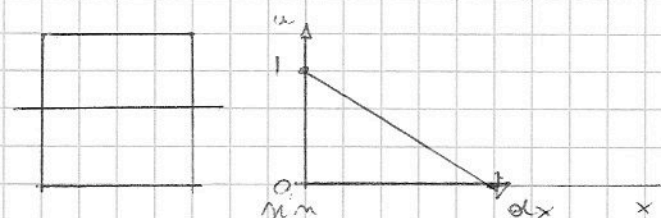
Manca info nel materiale. (1: def. il corpo; 2: def. la fisica del problema; 3: def. il materiale).

il materiale è isotropo e omogeneo: $K = k I$ si riduce a:

$$\text{div}(k \nabla u) = 0 \quad \text{in } B$$

$k \nabla u \cdot n = 0$ sopra e sotto (a dx e nx non so dire nulla ma G che porta reazione vincolare)

Sol. \exists ed è unica



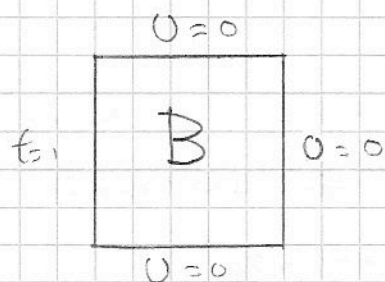
$$\nabla u = \begin{vmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/L \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soddisfa le eq.!

$$|G| = \begin{vmatrix} -k/L \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{div } G = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{k}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \checkmark \text{ sopra (e sotto)}$$

Ex: problema stazionario

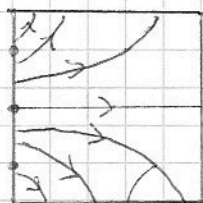


$$\operatorname{div}(k \nabla u) = 0 \quad \text{in } B$$

$$k \nabla u \cdot n = t \quad \text{sinistra}$$

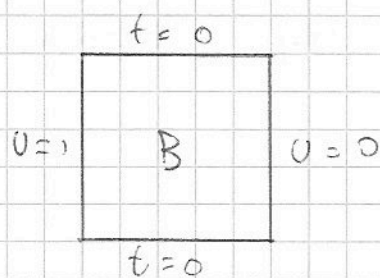
C'è sym tra sopra e sotto.

Calore entra da sin. Essendo isotropo, quello del centro va dritto, gli altri escono le prima periferie



le linee di corrente (curve tangenti a \vec{G})

Ex: problema non stazionario

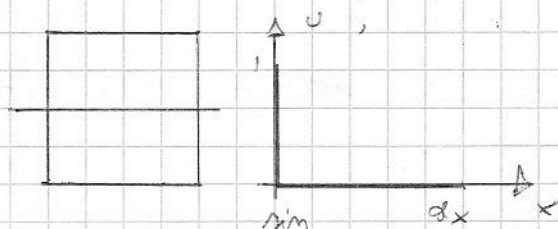


$$C.I. = \operatorname{div}(k \nabla u) \quad B \times T$$

$$G \cdot n = 0 \quad \text{destra e sinistra } \times T$$

$$C.I.: U = 0 \quad \text{in } B \times \{0\} \rightarrow \text{istante nullo}$$

1) la C.I. è compatibile con ciò che dico al bordo? No!
A $x=0$ ho $U=1$, si scenderebbe in basso.



2) \exists soluzione stazionaria? Cioè se tutto si ferma dopo certo Δt .

Indichi dim. spazio, Weak form, Subdomain. [n.d.l.v
Info su oggetto fisico delle rel. costitutive, da cui
derivano le m.r.]

- Depend variables (var. di stato, incognite del problema, nome dei campi, var. scalari)
- Application mode name, ok

Disegna quadrato centro in ϕ lato 1 (dominio dei campi)
unità di misura \rightarrow dalla fisica (sistema dimensionale
quando insierisce la tipologia di materiale)

- Physics - Subdomain n. - 1; Weak: $-u_x = \text{test}(u_x)$
- " - Boundary settings - Weak: $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -u \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{su tutti e 4 i lati} \\ u=0 \end{matrix} \right.$
(eq. al contorno)

- Solve eq del calore:

Physics - Subdomain n. - Weak: $-G_1 \text{test}(u_x) - G_2 \text{test}(u_y) -$
 $+ f \cdot \text{test}(u)$

Una volta introdotte nuove espressioni in def. termin.

- Option - expression - Global expression.

Name EXPRESSION

$$G_{11} = k_{11}(u_x) + k_{12}(u_y)$$

$$G_{22} = k_{12}(u_x) + k_{22}(u_y)$$

$$f = 1$$

Se il corpo non fosse omogeneo ke una $f_z \Rightarrow$ la scelta
in expression, in questo caso:

- Option - Constant Name EXPRESSION

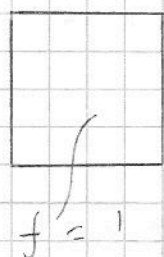
k_{11}

1

e isotropo

k_{12}

0



$$\bar{U} = 0$$

$$\int_B -G \cdot \nabla \tilde{u} + \overset{\text{input}}{f} \cdot \tilde{u} = 0 \quad \forall \tilde{u}$$

$$\operatorname{div} G + f = 0 \quad \text{in } B$$

$$U = \bar{U} \quad \text{in } \partial B$$

Relazione costitutiva:

$$G = K \nabla u$$

$$K \nabla u \cdot \nabla u \geq 0$$

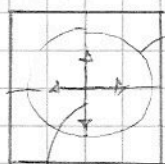
$$K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix}$$

→ deve essere simmetrica & definita positiva
(Vogliamo energia)

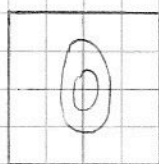
Però come valore di k se isotropa ∇ dir. privilegiata:

$$k = k_I$$

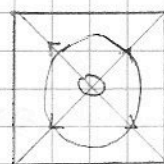
Se $k_{11} > k_{22}$ ho dir. privilegiata:



curve
di
livello



$[k_{12}=0]$. Se $k_{11} = k_{22} =$
 k_{12} :

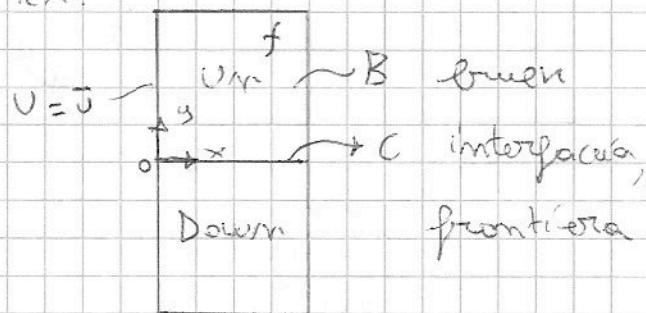


$$\nabla u$$

autovet

Direzione da $K \sigma = \lambda \sigma$
↓
autovet.

Ex:



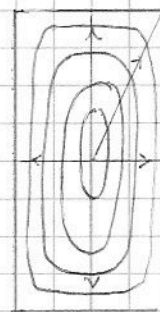
$$\int_B -G \cdot \nabla \tilde{u} + f \cdot \tilde{u} = 0 \quad \forall \tilde{u}$$

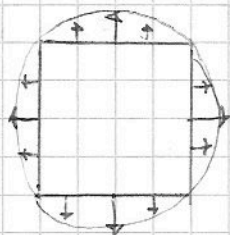
$$B = B_u \cup B_d$$

(unione)

Come è fatto colore che
esce dal bordo?

se fosse
unico
 B





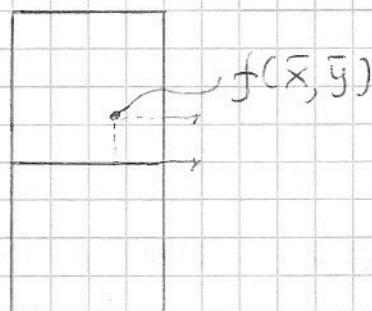
Esse dal bordo $G = k \nabla u$

Agli angoli ho $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ [non ho \hat{n}]

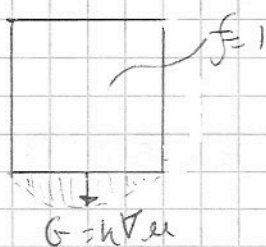
Consideriamo sia C:

$$\int_C -G_c \nabla \tilde{u}_c + f_c \cdot \tilde{u}_c = 0 \quad \forall \tilde{u}_c$$

\hookrightarrow input



Interfaccia conduce calore, va visto se si + o si - di B

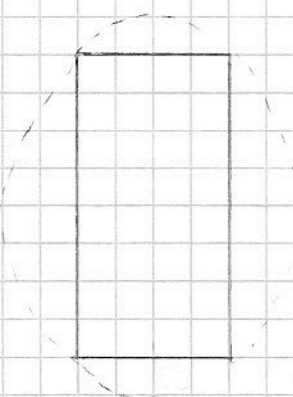


Risultante: $\int_{\partial B} G \cdot n = \text{Area } B$

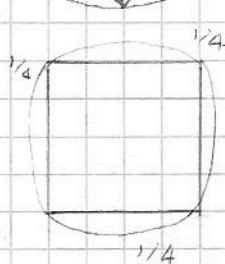
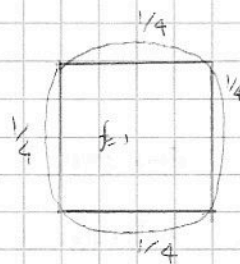
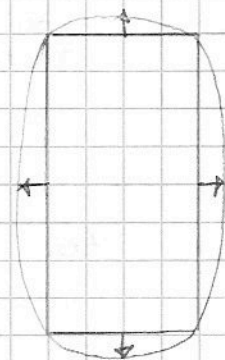
[Sorgente: $\int_B f = \text{Area } B$]

Da ogni lato esce
stessa quantità, quindi

in C esce $\frac{1}{4} \text{ Area } B$.

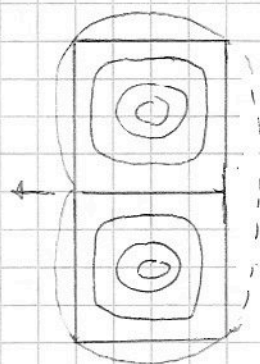
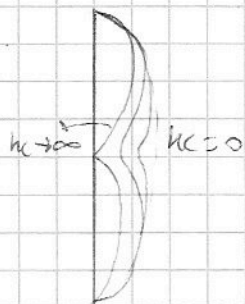
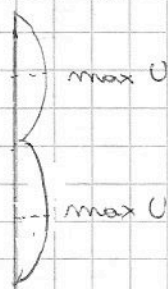


Calore in parte
uscita dall'interfaccia
e darò toglierlo
dal bordo.



Entrata $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ed esce $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

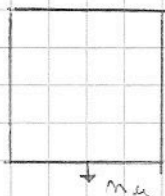
nella condizione miste



$$\int_C -G_c \cdot \nabla \tilde{u}_c + f_c \cdot \tilde{u}_c = 0 \quad \forall \tilde{u}_c$$

$$f_c = - (G_u \cdot m_u + G_d \cdot m_d) = (G_u - G_d) \cdot m$$

$m = md$



$$\int_C -G_c \cdot \nabla \tilde{u}_c + ((G_u - G_d) \cdot m) \cdot \tilde{u}_c = 0 \quad \forall \tilde{u}_c$$

Ora ho per la relazione costitutiva:

$$G = k \nabla u$$

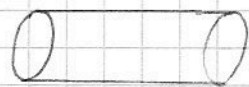
$$G_c = k_c \nabla u_c$$

$$|G| = \frac{PL}{\Delta V} = \frac{P}{L}; \quad |k| = \frac{P}{\Theta}$$

$$|G_c| = \frac{PL}{\Delta V} = P; \quad |k_c| = \frac{PL}{\Theta}$$

$$\left| \frac{k_c}{k} \right| = L$$

Es B e' uelro e C e' rame, rame conduce talmente tanto che per esempio di dim minori colore passa di, coniscero solo Morsia di rame. Come x teoria brave!



trave 3D

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$



trave 1D

$$\pi = (E) u''$$

conservo cio' che ho

eliminato nel passaggio

Eq bilancio & rel costitutive:

$$\int_C - \frac{k_c}{h} \nabla u_c \cdot \nabla \tilde{u}_c + ([\nabla u] \cdot m) \cdot \tilde{u}_c = 0 \quad \forall \tilde{u}_c$$

\hookrightarrow salto di ∇u

Se interporcia conosce 1000 volte di + il rapporto e' 1, niente

Quindi un forma cuff:

(fluido)

$$\begin{cases} \operatorname{div} G + f = 0 & \text{in } B_0 \cup B_d & u = \bar{u} & \text{in } \partial(B_0 \cup B_d) \\ \operatorname{div} G_c + [G] \cdot n = 0 & \text{in } C & u_c = \bar{u} & \text{in } \partial C \end{cases}$$

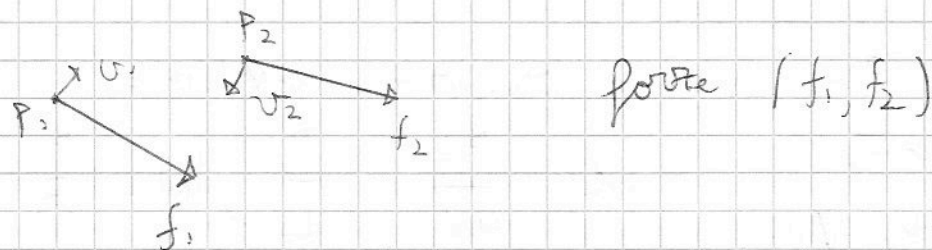
(input)

"LA PROPRIETÀ CARATTERISTICA DELLE ALIUI INTERNE"

14/11/2008

ed un corpo è quella di generare potenza nulla negli Atti di Moto Rigido (AMR)

Consideriamo un corpo costituito da 2 soli punti:



Atto di moto e campo di velocità

(Rigido, traslazione o rotazione)

Coppia di vettori (v_1, v_2)

Atto di moto test $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \rightarrow$ una sella tanto che può realizzare

Potenza spesa su atto di moto test:

$$P = f_1 \cdot \tilde{v}_1 + f_2 \cdot \tilde{v}_2$$

Principio di bilancio:

$$P = 0 \quad \forall \text{ test} \Rightarrow f_1 \cdot \tilde{v}_1 + f_2 \cdot \tilde{v}_2 = 0 \quad \forall \tilde{v}_1, \tilde{v}_2$$

Se $\tilde{v}_2 = 0, \tilde{v}_1 \neq 0 \Rightarrow f_1 = 0$ e viceversa al contrario $f_2 = 0$.

Distinzione forze interne ed esterne

$$f_1 = f_1^{\text{out}} + f_{12} \rightarrow \text{forza che agisce su } P_1 \text{ dovuta a } P_2$$

$$\textcircled{16} f_2 = f_2^{\text{out}} + f_{21} \rightarrow \text{" " " " } P_2 \text{ " " } P_1$$

Quindi

$$f_1^{\text{out}} + f_{12} = 0$$

$$f_2^{\text{out}} + f_{21} = 0$$

$\bullet P_2$



Potenza azioni interne

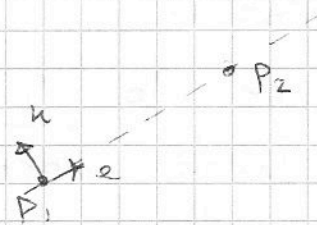
$$f_{12} \cdot \tilde{U}_1 + f_{21} \cdot \tilde{U}_2 = 0 \quad \forall \text{ AMR}$$

(e non \forall test)

ci conviene orientare base con corpo:

Atti di moto test $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)$

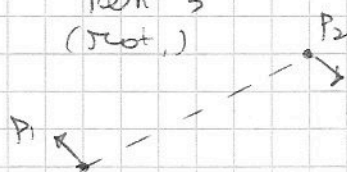
Test 1:
(trasl.)



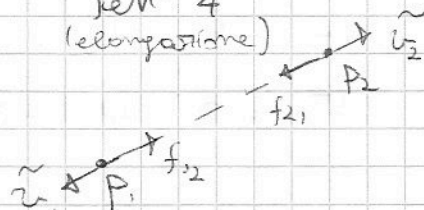
Test 2:
(trasl.)



Test 3
(rot.)



Test 4
(elongazione)



Faccio test regolando l'intensità, genero tutti i vett. possibili. Sono base dello spazio di dim. 4

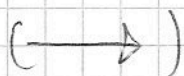
1 primo 3, poiché dist tra i punti è invariata, non AMR. Test lin indep. Posso regolare solo l'int. della f. interna.

Rappresentazione AMR:

$$U_i = U_0 + \omega (x_i - x_0) = U_0 + \omega \times r_i \quad \text{con } r_i = x_i - x_0$$

U_0 : Velocità traslazione

ω : " angolare



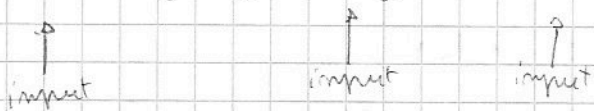
dim \mathcal{E} :

| | 3D | 2D |
|------------|----|----|
| dim v_0 | 3 | 2 |
| " ω | 3 | 1 |

Di ω mi serve l'intensità
che diretta e sempre \perp al
piano.

3 punti con velocità nulla? $v_0 + \omega \times (x_3 - x_0) = 0$

$$\omega \times (x_3 - x_0) = -v_0$$



In 3D no, in 2D si. Ogni
atto di moto e rotatorio
(traslazione ha centro di

rot. all'infinito). Il nuovo centro di π si muove \perp
alla traslazione.

Valutiamo la potenza su AMR.

Scelgo come polo il punto di mezzo:

$$x_0 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

Test 1: $v_0 = e$; $\omega = 0$

" 2: $v_0 = k$; $\omega = 0$

" 3: $v_0 = 0$; $\omega = -2(x_2 - x_1)$

Potenza:

$$v_1 \cdot f_1 + v_2 \cdot f_2 = \underbrace{(v_0 + \omega \times \pi_1)}_F \cdot f_1 + \underbrace{(v_0 + \omega \times \pi_2)}_{M_0} \cdot f_2$$

$$= v_0 \cdot (f_1 + f_2) + \omega \cdot (\pi_1 \times f_1 + \pi_2 \times f_2)$$

Conta la RISULTANTE (F) e MOMENTO RISULTANTE ($M_0 \rightarrow$ a quel
polo)

Corpo rigido:

| |
|-----------|
| $F = 0$ |
| $M_0 = 0$ |

Potenza azioni interne:

$$v_1 \cdot f_{12} + v_2 \cdot f_{21} = 0 \quad \forall \text{ AMR}$$

(18) $v_0 \cdot (f_{12} + f_{21}) + \omega \cdot (\pi_1 \times f_{12} + \pi_2 \times f_{21}) = 0$

$f_{12} = -f_{21}$ (e posso ancora decidere come metterle)

$$\pi_1 \times f_{12} = \pi_2 \times f_{21} \Rightarrow f_{12} \parallel \pi_1 + \pi_2 \text{ (vel. posizione)}$$

Equazioni di bilancio

$$f_1^{\text{out}} + f_{12} = 0$$

e

$$f_2^{\text{out}} - f_{12} = 0$$

$$f_1^{\text{out}} + \lambda(x_1 - x_2) = 0$$

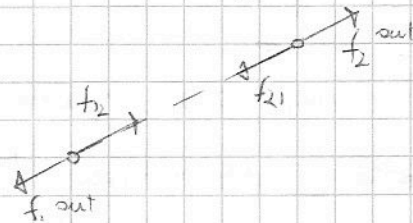
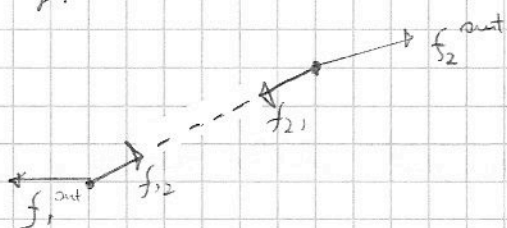
$$f_2^{\text{out}} - \lambda(x_1 - x_2) = 0$$

Anche in corpo deformabile $F = 0$

f_1 interna ha come param. libero solo l'intensità,

non va bene, $f_1^{\text{out}} + f_2^{\text{out}} = 0$

Posso risolvere



Assegno rel. costitutiva che lega f_1 interna al moto:

moto \longrightarrow forza interna

$$(x_1, x_2) \longrightarrow f_{12} = k(x_1 - x_2)$$

ELASTICITÀ NON LINEARE: CONTINUO DI CAUCHY

16/1/08

B : corpo materiale

T : asse temporale

\mathcal{E} : spazio ambiente

$$\dim B = \dim \mathcal{E} = 3$$

Conn. fenomeni stationari:

$$\mu: B \longrightarrow \mathcal{E} \quad \text{moto}$$

$$x \longmapsto x = \mu(x)$$

$$\omega: B \longrightarrow V \mathcal{E} \quad \text{velocità test}$$

$$x \longmapsto \omega(x)$$

$V \in$ spazio vettoriale

Potenzia:

$$P^{in}(w) = \int_B (S_0 \cdot w + S_1 \cdot \nabla w) dV ; \text{ nono libero solo}$$

di appiungere derivate.

Ex:

$$P^{in} : \text{dominio} \rightarrow \text{codominio}$$

$$[comp] \subset (w) \rightarrow R$$

$$w \mapsto P^{in}(w)$$

Lim: spazio delle applicazioni lineari

insieme dove posso \hookrightarrow "funzioni" + generali, anche vettori ecc.

fare somma tra matrici, "rappresentanti" dello m.a.l.
Servono per trasformare vettori.

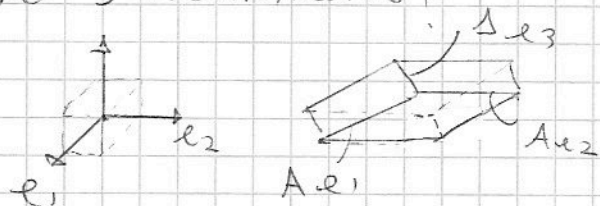
$$Lim = \{ A : V \in \rightarrow V \in, \text{ lineare} \} \& \text{ struttura di spazio lineare}$$

$$Au = v ; (A+B)u = Au + Bu$$

$$EI v^{IV} = q \text{ in } (0, L) \\ EI v''' = f \text{ in } L$$

si possono mettere 2
 $v(x) = \dots \frac{v_f}{f}$ f senza rifare
i calcoli

Il determinante?



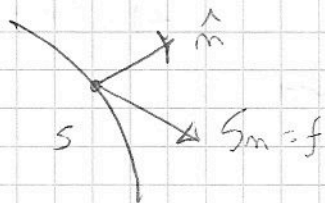
ti dice come e' variato il volume del cubo costruito sui vettori.

Se det = 0 ho schiacciato il

cubo, e' schiacciato un lato.

la tensione?

$$(20) \quad S_m = f \cdot v_e$$



$$\nabla \omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial r_2} & \frac{\partial \omega_1}{\partial r_3} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \omega_2}{\partial r_2} & \frac{\partial \omega_2}{\partial r_3} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

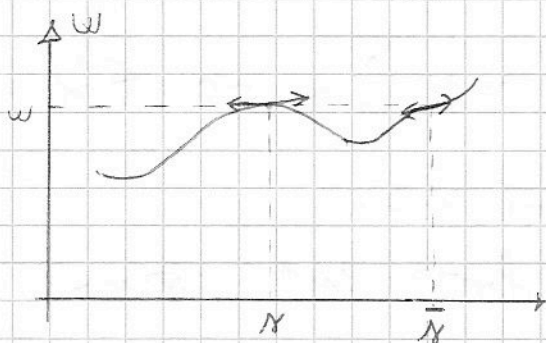
→ che "r" perché dominio di tutti i campi è $B \times T$

$$P^{in}(\omega) = \int_B (s_0 \cdot \omega + s_1 \cdot \nabla \omega) dV$$

\nwarrow tensione di ordine 0 \downarrow tensione di ordine 1

Il campo funziona con:

1. corpo rotazionale
2. variabili di stato (posizione)
3. Potenza := funzionale lineare nel campo delle velocità test



Se variis v. test se ne accorge con una forza

$$P(\omega) = \int_B s_0 \cdot \omega + s_1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} + \underbrace{s_2 \cdot \nabla \omega^2 + s_3 \cdot \nabla \omega^3}_{(ex M \cdot v'')}$$

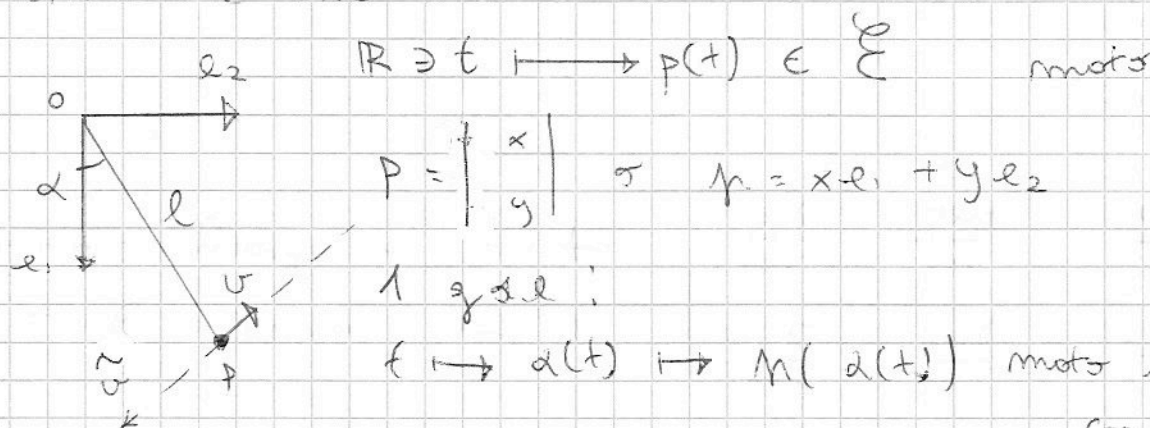
Analisi dimensionale

$$[P^{in}] = [s_0] [\omega] [dV]$$

$$\frac{FL}{T} = [s_0] \frac{L}{T} L^3 \Rightarrow [s_0] = \frac{F}{L^3} \text{ forza specifica}$$

$$[P^{in}] = [s_1] [\nabla \omega] [dV]$$

$$\frac{FL}{T} = [s_1] \frac{L}{T} \frac{1}{L} L^3 \Rightarrow [s_1] = \frac{F}{L^2} = \frac{E}{L^3} \text{ tensione e densità di energia}$$



$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad r = x e_1 + y e_2$$

1 g.d.l.:

$t \mapsto \alpha(t) \mapsto r(\alpha(t))$ moto parametrizzato

con α :

$$r = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{la velocità è } v = \dot{r} = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Qui la param. da l'intervallo α e il vettore

La V. test ha ∞ vettori, deve essere tan. alle mappe delle configurazioni: $\tilde{v} = \tilde{\alpha} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \tilde{\alpha} \tau$, tangente

$$v = \dot{\alpha} \tau$$

Principio di bilancio:

$$p(\tilde{v}) = f \cdot \tilde{v} = 0 \quad \forall \tilde{v}$$

(prendo base tan e \perp alla traiettoria)

$$= (f_\tau \cdot \tau + f_n \cdot n) \cdot \tilde{\alpha} \tau = 0 \quad \forall \tilde{\alpha}$$

ovvero la componente normale non conta:

$$\Rightarrow f_\tau = 0 \quad (\text{risultante di tutte le forze nel corpo})$$

$$f = f_{\text{inerzia}} + f_{\text{peso}} + f_{\text{reat. vincl.}} \quad \text{e' } \perp \text{ alla traiettoria} =$$

$$= m \ddot{r} + m g e_1 - R n \quad [m = m(\alpha)]$$

Per: $r = l(t) \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) \end{pmatrix}$ distanza varia nel tempo e corpo ha 2 g.d.l.

Coordinate in dist. $0-l$ e angolo [angolo di base]

(ola CONTINUO DI CAUCHY)

$$P^{im}(w) = \int_B \overbrace{(S_0 \cdot w + S_1 \cdot \nabla w)}^{\text{azioni interne}} dV$$

$$P^{out}(w) = \int_B \overbrace{f \cdot w}^{\text{azioni esterne}} dV + \int_{\partial B} g \cdot w dA$$

$$P^{im}(w) = P^{out}(w) \quad \forall w \text{ test}$$

Per il bilancio del momento in elasticità w .

1) Una regola di Leibniz (derivata prodotto di funzioni)

$$\operatorname{div}(A^T w) = \operatorname{div} A \cdot w + A \cdot \nabla w$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

2) Th. della divergenza:

$$\int_B \operatorname{div} \cdot v dA = \int_{\partial B} v \cdot \underbrace{n}_{\text{normale al bordo}} dA$$

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a) \quad [\text{caso più semplice}]$$

\uparrow normale al bordo



$$P^{im}(w) = \int_B \left(\underbrace{S_0}_{\text{tensore}} \cdot \underbrace{\operatorname{div} S_1}_{\text{tensore}} \right) \underbrace{w}_{\text{vettore}} dV + \int_{\partial B} \underbrace{S_1^T}_{\text{tensore}} \underbrace{w}_{\text{vettore}} \cdot \underbrace{n}_{\text{vettore}} dA$$

Voglio w :

$$\int_{\partial B} S_1 \cdot n \cdot w dA$$

Principio di bilancio:

$$\int_B (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}_1 + f \cdot \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\partial B} (\mathbf{S}_{1,m} - \mathbf{L}) \cdot \mathbf{w} \, dA = 0 \quad \forall \mathbf{w}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} S_1 + f - \lambda_0 = 0 & \text{im } B \\ S_1|_{\partial B} = 0 & \end{cases}$$

S; no incognite (stato di
valle ci tazione)

↳ INPUT

$$P^{\text{km}}(\omega) = 0 \quad \forall \text{ ATR}$$

Comme il faut le A.M.R. ?

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1 \quad ; \quad \vec{v}(x) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (x - \sigma) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{polo} \end{matrix}$$

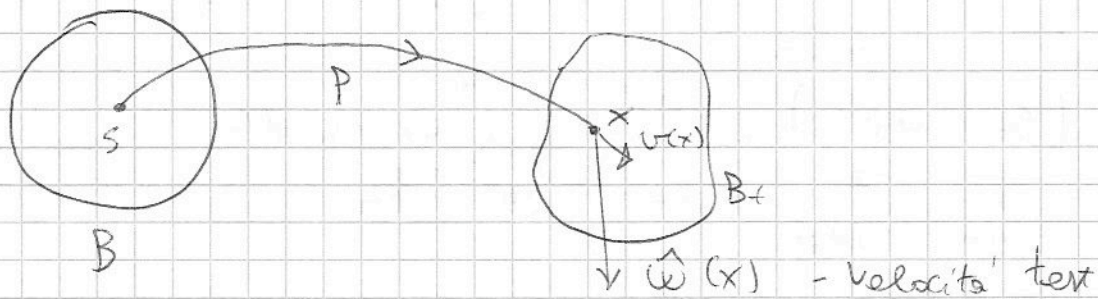
$$P(w) = \int_B (S_0 \cdot w + S_i \cdot \nabla w) dV$$

$$B \rightarrow S \mapsto x = \mu(x) \in \Sigma$$

\downarrow points \downarrow mots
 positionne

Nella meccanica dei solidi
conta il punto la materia.
In m. dei fluidi conta la
posizione.

AMR test: $\hat{w}(x) = w_0 + \tilde{w} \times (x - \sigma)$



$$\psi(r) = \hat{\psi}(r(r)) \Rightarrow \psi(r) = \psi_0 + \tilde{\psi} \times (r(r) - \sigma)$$

$$\psi(r) = \psi_0 + W(r(r) - \sigma) \quad ; \quad [\psi] = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(24) \quad |W| = \begin{vmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$W \times V = W \cdot V$ (prodotto vettore diventa prodotto righe per colonne)

W sono antisimmetriche: $W \in \text{Skw}$ (Skew = antisym)

$$\frac{d}{dx} x = 1, \quad \frac{d}{dx} dx = d, \quad \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot x$$

$$\frac{d}{dx} W(x) = \frac{\partial}{\partial x} (W(x-s)) \frac{\partial x}{\partial r}$$

$$\nabla W = W \nabla r$$

$$\int_B (S_0 \cdot (W_0 + \tilde{W} \times (r(r) - s)) + S_1 \cdot W \nabla r) dV = 0 \quad \forall \text{ AFR}$$

$\forall W_0, \quad \forall W \sim \forall \tilde{W}$

So muove. Ex: $W_0 \neq 0, W = 0$ ho

$$\int S_0 \cdot W_0 = 0 \quad \forall W_0 \Rightarrow S_0 \equiv 0$$

Tensioni interne non producono mai potenza in AFR.

Rimane:

$$\int_B (S_1 \cdot W \nabla r) dV = 0 \quad \forall W =$$

$$= \int_B (S_1 \nabla r^T \cdot W) dV = 0 \quad \forall W$$

$\rightarrow \text{antisym}$

$S_1 \nabla r^T \in \text{Sym}$, delle tensione $P=0$ in AFR!

Principio bilanciato & potenza nulla AFR:

| | |
|-------------------------------|-----------------|
| $\text{div } S + f = 0$ | in B |
| $S \cdot n = g$ | in ∂B |
| $S \nabla r^T \in \text{Sym}$ | |

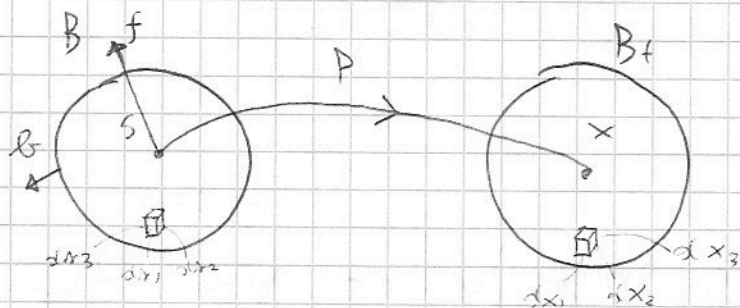
$$\Gamma P: B \times T \longrightarrow \Sigma \text{ Moto}$$

$$(r, t) \mapsto x = \eta(r, t)$$

$B_t = P(B, t)$ configurazione gli B al tempo t

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} S + f = 0 \quad \text{in } B \times T \\ S_{,m} = b \quad \text{in } \partial B \times T \end{array} \right\} \text{equazioni di bilancio}$$

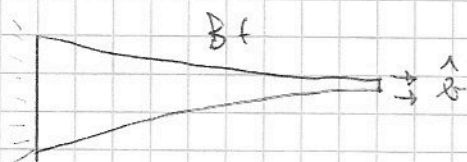
$S \nabla \eta^T \in \operatorname{Sym}$, prescrizione costitutiva nella tensione



$$\operatorname{Vol}(B) = \int_B 1 \, dV = \int_B dr_1 dr_2 dr_3$$

$$\operatorname{Vol}(B_t) = \int_{B_t} dV = \int_{B_t} dx_1 dx_2 dx_3$$

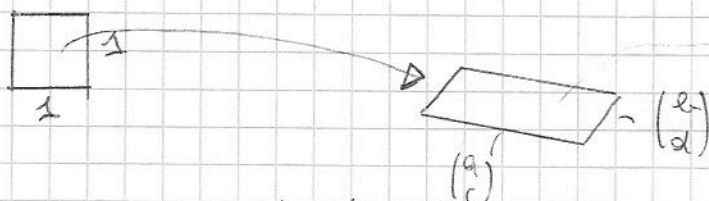
Ex:



Nota P no tutto de B_t e le
var di volume le misura
e determin: $dV = (\det \nabla \eta) dV$

$$dx_i = \nabla \eta \, dr_i, \text{ oppure } \frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \nabla \eta$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$



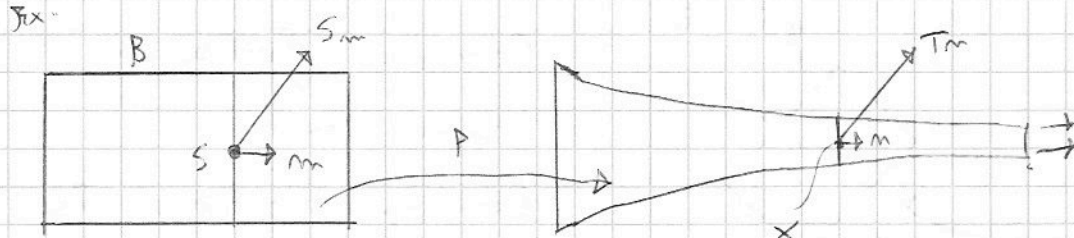
Area e' P.V tra i 2 che e'
 $= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Quindi } \int_{B_t} \det \nabla \eta \, dV = \operatorname{Vol}(B_t)$$

lo no risolvere

$$P^{in}(\omega) = \int_B S \cdot \nabla \omega \, dV = \int_B S(r) \cdot \nabla \omega(r) \, dr_1 dr_2 dr_3$$



m può anche variare.

$$P^{in}(\hat{w}) = \int_{B^+} T(x) \cdot \nabla \hat{w}(x) dv$$

→ termine (di Cauchy)

ci serve una relazione tra S e T .

Tutto m regge nella potenza:

$$P^{in}(w) = P^{in}(\hat{w}) \quad \forall w, \hat{w} \text{ in relazione tra loro}$$

$$\hat{w}(x) \leftrightarrow w(r) : w(r) = \hat{w}(\overbrace{r(r)}^x); \text{ dove da entrambi i lati}$$

$$\nabla \hat{w}(x) ; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r} \text{ quindi } \nabla w = \nabla \hat{w} \nabla r$$

Poi:

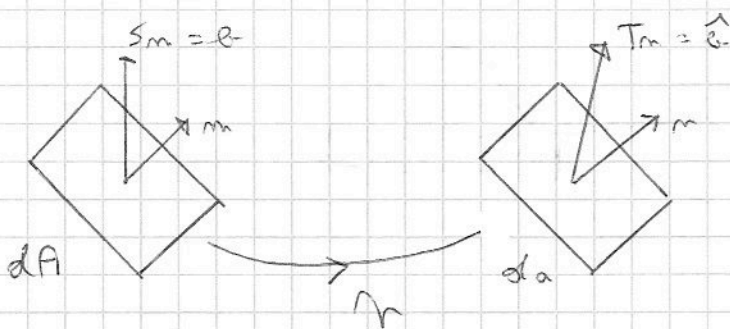
$$\int_B S \cdot \nabla w dv = \int_{B^+} S \cdot \nabla \hat{w} \nabla r \frac{1}{\det \nabla r} dv = \int_{B^+} \frac{1}{\det \nabla r} S \nabla r^T \cdot \nabla \hat{w} dv =$$

$$= \int_{B^+} T \cdot \nabla \hat{w} dv \quad (\text{Quindi la tensione è sim})$$

$$T = \frac{1}{\det \nabla r} S \nabla r^T$$

$$\int_B S \cdot \nabla w dv = \int_B f \cdot w dv + \int_{\partial B} g \cdot w dA \quad \forall w$$

$$\int_{B^+} T \cdot \nabla \hat{w} dv = \int_{B^+} \hat{f} \cdot \hat{w} dv + \int_{\partial B^+} \hat{g} \cdot \hat{w} d\hat{a} \quad \forall \hat{w} \rightarrow \operatorname{div} T + \hat{f} = 0 \text{ in } B^+ \\ \hat{T}m = \hat{g} \text{ in } \partial B^+ \\ \text{normale al } \partial B^+ \neq m$$



Come è fatta m
nota m?
Con r conosco la
forma del corpo;

r trasporta punti, ∇r trasporta vettori
 $S \xrightarrow{\quad} x = r(x) \quad dx \xrightarrow{\quad} dx' = \nabla r \, dx$

$\det(\nabla r)$ trasporta volumi: $dx' = \det \nabla r \, dx$
 $S \xrightarrow{\det} dx'$

$\nabla r^* = \det(\nabla r) \nabla r^{-T}$ che misura le var. di area.

Quindi: $m = \frac{\nabla r^* m}{|\nabla r^* m|}$

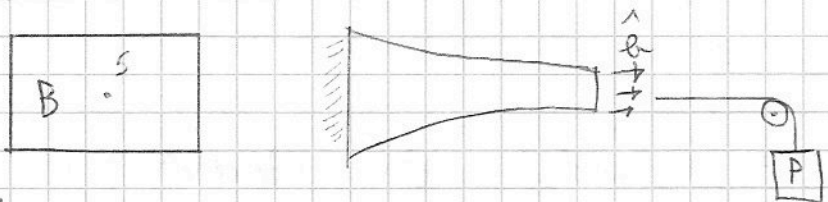
$\hat{b} \, da$ = $T m \, da = T \frac{\nabla r^* m}{|\nabla r^* m|} da = \underbrace{T \nabla r^*}_\text{forza di azione in } x} m \underbrace{\frac{da}{|\nabla r^* m|}}_\text{da}$

Quindi $= \int m \, dA = \underline{\hat{b} \, dA}$

Riepilogo

| | | |
|--|--|---|
| $\text{div } S + f = 0 \quad \text{in } B$ | | $\text{div } T + \hat{f} = 0 \quad \text{in } B+$ |
| $S_m = b \quad \text{in } \partial B$ | | $T_m = \hat{b} \quad \text{in } \partial B+$ |
| $S = T \nabla r^*$ | | $T = \frac{1}{\det \nabla r} S \nabla r^T$ |

Rx:



\hat{b} è incogn. Una delle inc. fondamentali è $B+$ e uno
 dei dati fond. è B . Voglio la terr.
 nel corpo, $T(x)$.

Se carico è molto + forte della f. prev. escluso f.
 Di \hat{b} è nota la risultante, assumo che campo \hat{b}
 sia uniforme $[\hat{b} = \frac{P}{\sigma \alpha}]'$
 Risolvo le eq in B e ∂B che conosco e poi le lego
 a B_t e ∂B_t : $\text{div} A = \frac{1}{\epsilon} \sigma \alpha$

Quindi:

DATI!

B

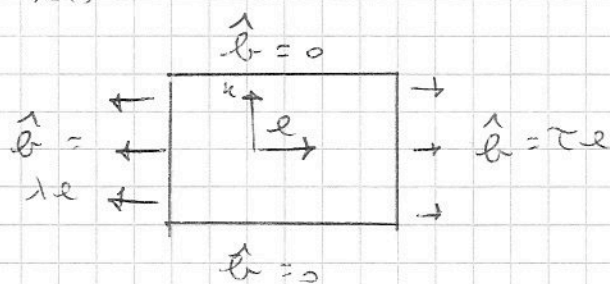
INCOGNITE!

5

↳ Quante? 6

Quante equazioni? 6 \rightarrow 3 in B e 3 in ∂B . Ma abbiamo
 disse come è fatta 5 ovunque, bisogna di 6 eq in B
 e 6 in ∂B . Troppa incognite. Lanciamo le relazioni
 costitutive.

Ex:



$$\begin{cases} \text{div } T = 0 & \text{in } B_t \\ T_m = 1e, T_e \text{ (sx e dx)} \\ T_m = 0 & \text{(sopra & sotto)} \end{cases}$$

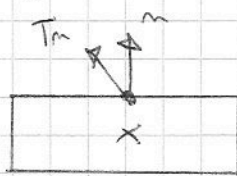
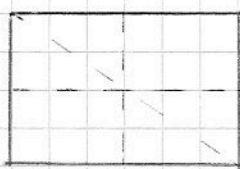
Sistema ha soluzione?

$\sum f$ e $\sum \pi$ sempre pari a 0. F uguale a 0x e 0x quindi

$$T_m = \pm \tau e$$

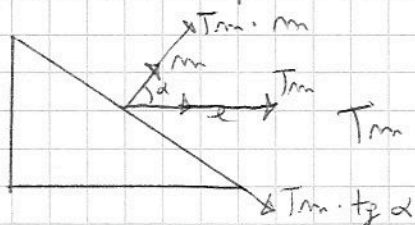
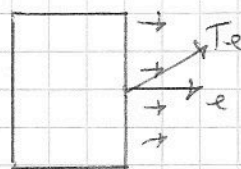
$$T = \begin{pmatrix} \tau & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}; \text{ Verifico: } T e = \tau e \checkmark; T(-e) = -\tau e \checkmark$$

$T_n = 0 \checkmark$. Facio tagli oleale:



$$T_m = 0$$

$$T_e = \tau$$

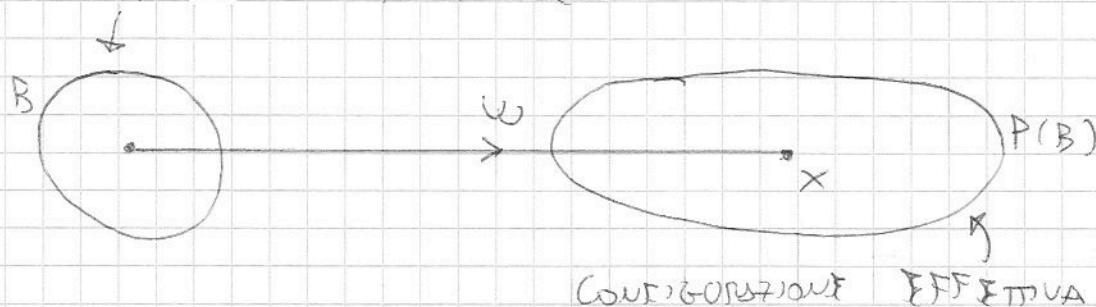


$$T_m = \begin{pmatrix} \tau & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

FINE 1° PERIODO (23/1/08)

MECCANICA DEL CONTINUO - Prof. Torelli - II semestre (19/2 - 03/4)

- 30. CONFIGURAZIONE DI RIFERIMENTO
- 36. ENERGIA ELASTICA
- 41. PROBLEMA ELASTICO LINEARE
- 42. RAPPRESENTAZIONE DI VOIGT
- 45. MATERIALI ANISOTROPI
- 46. CAMBIO DI BASE
- 48. METODO AGLI ELEMENTI FINITI
- 50. ELASTICITÀ NON LINEARE



$$x = p(r) = r + u(r)$$

\downarrow \downarrow
 posizione spostamento

Equazioni di bilancio:

$$\int_B -S \cdot \nabla w + f w + \int_{\partial B} b \cdot w = 0 \quad \forall w$$

$$\int_{P(B)} -T \cdot \nabla \tilde{w} + \hat{f} \cdot \tilde{w} + \int_{\partial P(B)} \hat{b} \cdot \tilde{w} = 0 \quad \forall \tilde{w}$$

I corpi ci vediamo nella configurazione $P(B)$

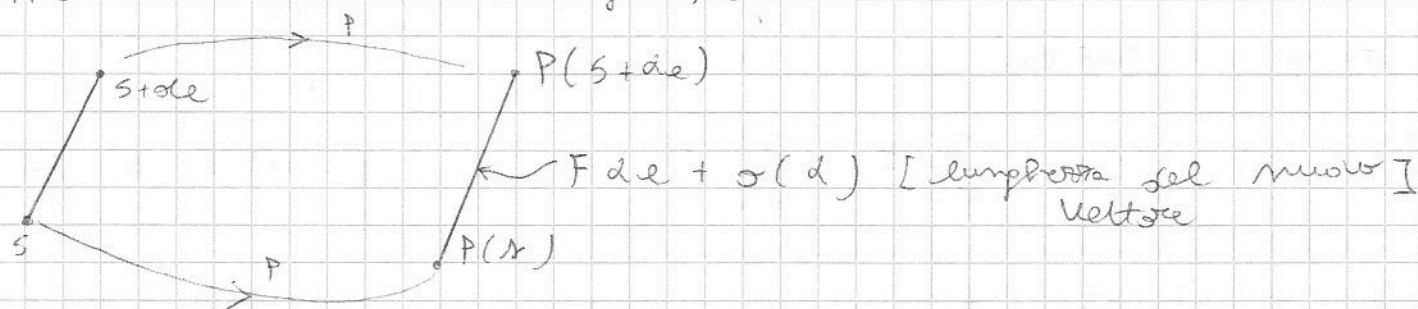
Semplificazione del problema quando u è piccolo cioè B è circa pari a $p(B)$ (come avvenuto nella trattazione della teoria della trave).

$$x = p(r) = r + \varepsilon u(r)$$

\downarrow parametro che regola lo spostamento

$$F := \nabla p = I + \varepsilon \nabla u \quad (\text{gradiente della posizione})$$

Come variano le lunghezze?



Relazione tra i due vettori:

$$p(s+de) = p(s) + d \nabla p(r) e + \overbrace{\sigma(d)}^{\text{quantità piccole}}$$

$$|e| = 1$$

lunghezza iniziale $L_0 = |\alpha e| = \alpha$

lunghezza finale $L = \alpha |F e| + o(\alpha)$

$\eta \rightarrow$ serve a spostare i punti

$\nabla \eta \rightarrow$ dice come varia la distanza tra i punti

$$\delta L(e) = \frac{L - L_0}{L_0} = |F e| - 1 \quad \text{deformazione della fibra}$$

$$\lambda(e) = \frac{L}{L_0} = |F e| + \text{allungamento}$$

della fibra e (infinitesimo)

Sono entrambi numeri puri.

Nel caso di spostamenti piccoli:

$$\lambda(e) = |F e|$$

$F = \nabla \eta = 1 + \varepsilon \nabla u$ + questo termine mi dice come è fatto lo spostamento

$$|F e| = \left(F e \cdot F e \right)^{1/2} = \left((1 + \varepsilon \nabla u) e \cdot (1 + \varepsilon \nabla u) e \right)^{1/2} =$$

$$= (e \cdot e + \varepsilon (\nabla u \cdot e \cdot e + e \cdot \nabla u e) + \varepsilon^2 \dots)^{1/2} = \text{(espanso)} = |F e|$$

$$= (e \cdot e + \varepsilon (\nabla u + \nabla u^T) e \cdot e + \varepsilon^2 \dots)^{1/2} = |F e| + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} |F e| + o(\varepsilon) =$$

(forma simbolica):

$$\boxed{f(x + \varepsilon) = f(x) + \frac{df}{dx} \varepsilon + \frac{d^2 f}{dx^2} \varepsilon^2 + \dots} \quad (\text{analoga a prima})$$

$$= 1 + \varepsilon \cdot \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) e \cdot e + o(\varepsilon)$$

$$\textcircled{3} K = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial s_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s_2} + \frac{\partial u_2}{\partial s_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s_3} + \frac{\partial u_3}{\partial s_1} \right) \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix} + \text{matrice di deformazione}$$

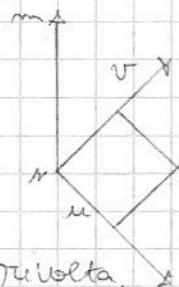
$$\lambda(\epsilon) = |F\epsilon| = 1 + E\epsilon \cdot \epsilon + o(\epsilon) \quad \text{Se lo spost. e' piccolo}$$

$$\delta L(\epsilon) = |F\epsilon| - 1 = E\epsilon \cdot \epsilon + o(\epsilon) \quad \text{lo minimo con } E \text{ con un errore piccolo pari a } o(\epsilon)$$

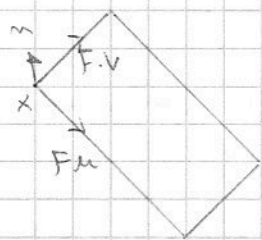
$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) = \text{sym } \nabla u$$

Come variano le aree?

Prodotto vettore $(u \times v) = m \hat{n} \rightarrow$ area parallelogramma normale



Dentro al p.vett. ho le info sull'area e a come e' ruotata.



$$F u \times F v = m' \hat{n}' \rightarrow \text{nuovo p.vett. per trovare l'area}$$

$$\text{l'area: } F u \times F v = F^* (u \times v) \quad \text{dove } F^* = (\det F) F^{-1} \quad \begin{matrix} \text{area vecchia} \\ \downarrow \text{oggetto che} \\ \text{trasforma l'area} \end{matrix}$$

$$a = |F u \times F v| = |F^* (u \times v)| = |F^* m| A \rightarrow \text{modulo area (senza orientazione)}$$

$$\frac{a}{A} = |F^* m| \quad \text{e' simile a } \lambda(\epsilon) = \frac{L_0}{L_{\text{finale}}}$$

$$m = \frac{u \times v}{|u \times v|}, \quad m' = \frac{F u \times F v}{|F u \times F v|} = \frac{F^* m}{|F^* m|} \quad \text{nuova normale}$$

$$a = |F^* m| A - \text{nuova area}; \quad m' = \frac{F^* m}{|F^* m|} \quad m - \text{nuova normale}$$

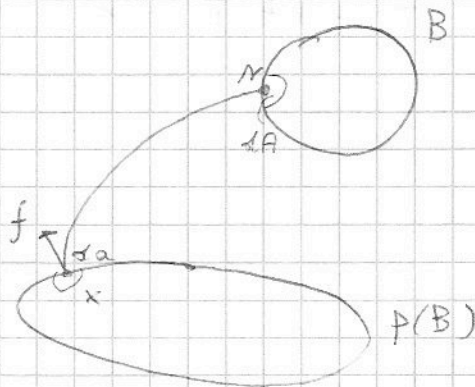
$$\text{La difficolta' e' in } F^* = (\det F) F^{-1} = \det(1 + \epsilon \nabla u) (1 + \epsilon \nabla u)^{-1} =$$

$$= F^* \Big|_{\epsilon=0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} F^* \Big|_{\epsilon=0} + o(\epsilon)$$

$$\int_{\partial P(B)} f(x) da = \int_{\partial B} f(n(r)) |F^* m| dA$$

rimettendo delle forze nel bordo nella configurazione $p(B)$

$$\frac{a-A}{A} = |F^* m| - 1 =$$

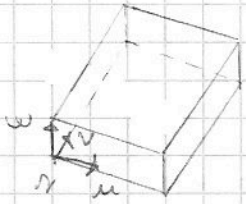


$$= E \cdot (1 - m \otimes m) + \sigma(E) \text{ e' l'equivalente di } \int L(e)$$

conta E e la fibra che considero con la normale

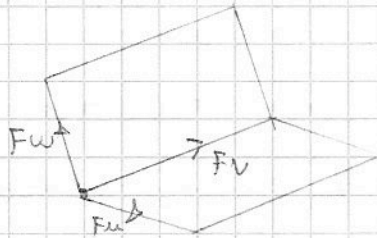
Come varia il volume!

Per il volume prendo 3 vettori



$$\text{Volume} = w \cdot (\underbrace{u \times v}_{\text{area della base}})$$

area della base

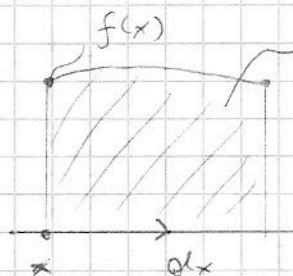


$$V = Fw (Fu \times Fv) =$$

$$= (\det F) w \cdot (u \times v)$$

ci dice come varia il volume

$$\frac{V}{V} = \det F \Rightarrow V = V \det F$$



area = base × altezza

$$\int_{P(B)} f(x) dV = \int_B f(p(x)) \det F dV$$

Relazione tra $f(x)$ e $f(p(x))$: sono gli stessi vettori che danno la stessa informazione

$$f(x) = f(p(x)) \rightarrow \text{varia solo la base, } ds \neq dx$$

$\det F$ serve per far tornare lo stesso numero

$$\frac{V}{V} = \det F = 1 + \text{tr } E + \sigma(E)$$

$$x = \mu(r) = S + u(r)$$

$$F = 1 + \nabla u$$

$$l(e) = |F e| l_0$$

- lunghezza

$$dx = F dr$$

$$a(m) = |F^* m| A$$

- area

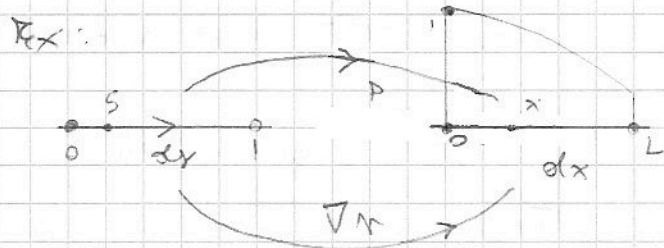
$$\sim da = |F^* m| dA$$

$$V = \det F \cdot V$$

- volume

$$dv = \det F \cdot dV$$

$$\text{Vol}(P(B)) = \int_{P(B)} dV = \int_B \det F dV$$



$$\int_0^L \overbrace{\cos x}^{\text{ex}} dx = \left. \sin x \right|_0^L = \sin L$$

(in conf. deformata)

$$\int_0^L \cos(\mu(r)) \det \nabla \mu dr =$$

Nota estremamente semplice: $x = SL = \mu(r)$

$$= \int_0^L \cos(SL) L dr = \sin L$$

Conc. Diagonal SPOSTAMENTI:

$$x = \mu = S + \varepsilon u$$

$$l(e) = (1 + E e \cdot e) l_0$$

$$a(m) = (1 + E(1 - m \otimes m)) A$$

$$V = (1 + \text{tr } E) V$$

$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ importante, misura la def. quando spostamenti sono piccoli

$$|F e|^2 = F e \cdot F e = F^T F e \cdot e \Rightarrow C = F^T F$$

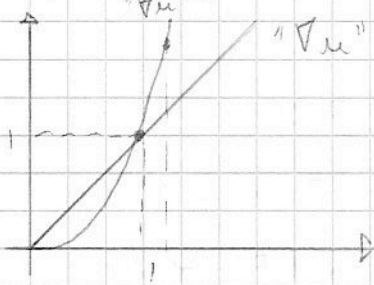
$C = F^T F$ misura di deformazione (non lineare)

E simmetrica ma se la def. è 0 è I. Si usa di solito

$$D = \frac{1}{2}(C - I) \text{ quindi}$$

$$D = \frac{1}{2} \left((1 + \nabla u)^T (1 + \nabla u) - 1 \right) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) + \frac{1}{2} \nabla u^T \nabla u$$

parte lineare + parte quadratica



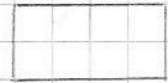
Fai esempi, tipo in 2D

$$x' = \eta'(r', r^2) = r' e_1 + r^2 e_2$$

$$x^2 = \eta^2(r', r^2) = 0$$

Oppure, dato \square e fatto η ?

diventa



come

POTENZA SPESA DALLA TENSIONE

$$x = \eta(\xi, t)$$

$\dot{\eta}$ velocità

ω vel. test

$$\dot{\eta} = v \circ \eta, \quad v \text{ e' vel. materiale}$$

$$\omega = \hat{\omega} \circ \eta, \quad \hat{\omega} \text{ e' vel. test materiale}$$

$$\dot{\eta}(\eta, t) = v(\underbrace{\eta(\eta, t)}_x, t)$$

$$\begin{aligned} F &= \nabla \eta, \quad \dot{\eta} \text{ e' vel.} \\ \nabla \dot{\eta} &= \dot{F} = (\nabla \eta)^{\cdot} \end{aligned}$$

POTENZA VIRTUALE

$$P(\omega) = \int_B S \cdot \nabla \omega \, dV = \int_{P(B)} T \cdot \nabla \hat{\omega} \, dV, \quad \omega = \hat{\omega} \circ \eta$$

POTENZA EFFETTIVA

$$P(\dot{\eta}) = \int_B S \cdot \dot{F} \, dV = \int_{P(B)} T \cdot \nabla v \, dV, \quad \dot{\eta} = v \circ \eta$$

$$S = T F^*, \quad F^* = (\det F) F^{-T}$$

$$\omega(\eta) = \hat{\omega}(\eta(\eta)), \quad \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

$$(\eta \mapsto x = \eta(\eta) \rightarrow \hat{\omega}(\eta(\eta)))$$

$$\nabla \omega = (\nabla \hat{\omega})_m F$$

$$\int_B S \cdot \nabla \omega \, dV = \int_{P(B)} T \cdot \nabla \hat{\omega} \, dV = \int_B T_m \cdot \underbrace{\nabla \omega F^{-1}}_{(\nabla \hat{\omega})_m} \underbrace{\det F \, dV}_{dV} =$$

$$= \int_B \underbrace{T F^{-T} (\det F)}_S \cdot \nabla \omega \, dV$$

ENERGIA ELASTICA

$\dot{\Psi}$ = potenza della tensione

$\Psi = \Psi(F)$; der. temporale $\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial F} \cdot \dot{F}$
 (e' dentro la pot. effettiva)

$$P(\dot{\mathbf{r}}) = \int_B \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} dV \quad \text{con } \mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}$$

Convr:

$$\Psi = \Psi(D) \quad \text{con } \dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial D} \cdot \dot{D} = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}$$

Poss $\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial t}$, e lecto. F e' app. lineare,

energia Ψ e' scalare ma e' piu' facile fare

$$\dot{D} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) = \text{sym}(\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}})$$

Allora

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial D} \cdot \dot{D} = \frac{\partial \Psi}{\partial D} \cdot \text{sym}(\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) = \frac{\partial \Psi}{\partial D} \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{\mathbf{F}} \quad \left(\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \frac{\partial \Psi}{\partial D} \in \text{sym} \right)$$

$$\underline{\Psi = \frac{1}{2} \mathbb{C} D D} = \frac{1}{2} C_{ijkl} D_{ij} D_{kl}$$

↓
tensore elastico

Se $\varphi = \frac{1}{2} k x^2$, $\dot{\varphi} = k x \dot{x}$ anche qui si ha

$$\dot{\Psi} = \mathbb{C} D \cdot \dot{D} \quad (\text{non serve quindi lavorare a componenti})$$

$$\text{Quindi } \mathbf{S} = \mathbf{F} \mathbb{C} \mathbf{D} = (1 + \epsilon \nabla \mathbf{u}) \mathbb{C} \left(\epsilon \mathbf{E} + \epsilon^2 \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u} \right) =$$

$$= 0 + \epsilon \mathbb{C} \mathbf{E} + o(\epsilon)$$

$$\bullet \text{div}(\mathbf{F} \mathbb{C} \mathbf{D}) + \text{corichi} = 0$$

$$\bullet \text{div}(\mathbb{C} \mathbf{E}) + \text{corichi} = 0$$

$$\text{Tensione vera e' } \mathbf{S} = \mathbf{T} \mathbf{F}^* = \mathbf{T} + o(\epsilon)$$

4/3/08

$$x = p(x) = \underset{\text{moto}}{x} + \underset{\text{spostamento}}{u(x)}$$

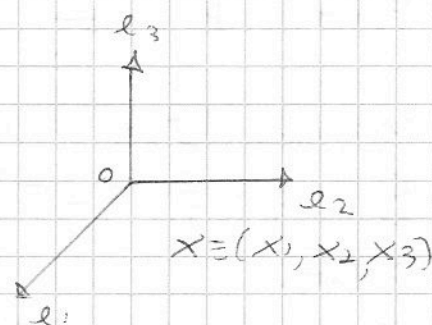
$$\mathbb{E} = \text{sym} \nabla u = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad \text{misura lineare della deformazione}$$

$$D = \mathbb{E} + \frac{1}{2} \nabla u^T \nabla u \quad \text{misura non lineare della deformazione}$$

Disegnare moto:

$$\begin{aligned} \mu: B &\rightarrow \mathbb{E} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

- 1) Base dello spazio dei vettori
- 2) scelta origine
- 3) rappresentazione in componenti



Quindi $x = \mu(x)$.

$$\begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline p^1(x_1, x_2, x_3) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline u_1(x_1, x_2, x_3) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline x_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline p^2(x_1, x_2, x_3) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline x_2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline u_2(x_1, x_2, x_3) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline x_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline p^3(x_1, x_2, x_3) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline x_3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline u_3(x_1, x_2, x_3) \\ \hline \end{array}$$

$$[\mathbb{E}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Esempio I:

$$x^1 = x^1 + k x^1 e_1$$

$$u^1 = k x^1 e_1$$

$$x^2 = x^2$$

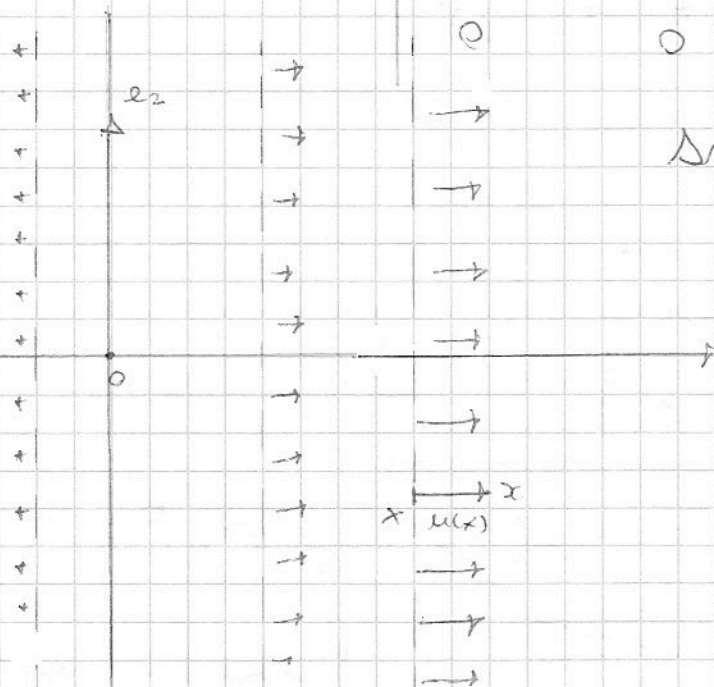
$$\leadsto u^2 = 0$$

$$(37) x^3 = x^3$$

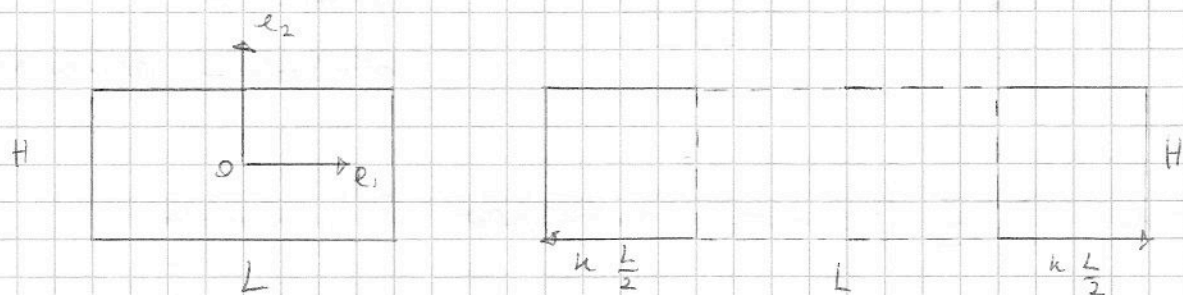
$$u^3 = 0$$

$$F = \nabla \eta$$

$$[F] = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I + \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Donc e_2 e' tutto fermo



$$A = LH ; a = L(1+k) \quad e \quad \frac{a}{A} = \frac{1+k}{1}$$

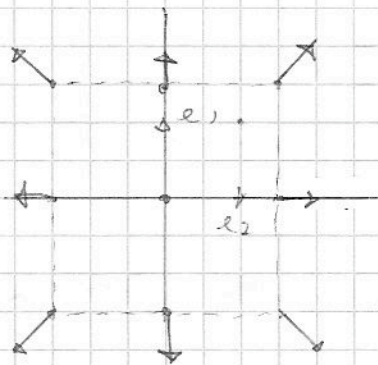
$$\det F = 1+k$$

$$\text{In realtà } a = \int_{\text{rettangolo originale}} \det F \, dA$$

Per

$$x = x + k(x) e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$F = \nabla \eta = I + \nabla u ; [F] = I + k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



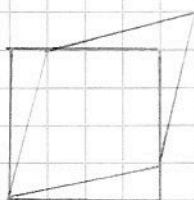
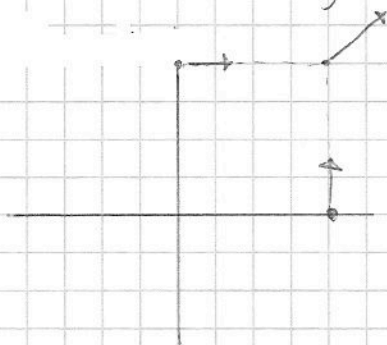
Comm. $\alpha \in \mathbb{R}$ $(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ kx_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\det F = (1+k)^3$$

Ex:

$$x' = x + k(x_1 e_2 + x_2 e_1)$$

$$F = I + \nabla u; |F| = 1 + k \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \det F = 1$$



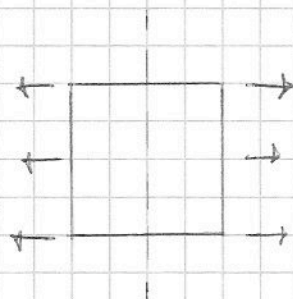
1 termine nelle
diagonali e
dall'altro espansione

$E \in \text{Sym} \Rightarrow \exists$ sempre autovalori & autovettori

$$E v = \lambda v$$

$$E u = \omega \rightarrow \omega = E u$$

Ex:

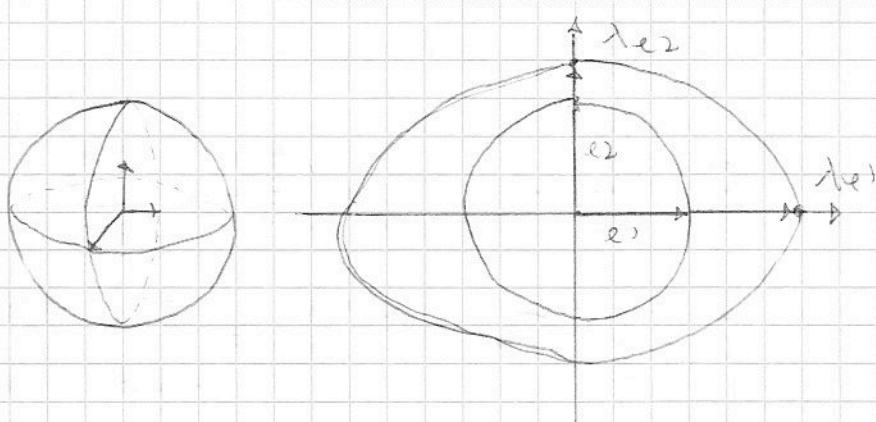


1 vett. orizzontali sono gli autovettori.
L'entità gli autovalori.

$$[E] = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \exists \text{ sempre una base privilegiata} \Rightarrow [E] = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

Comunque fatto n, posso prendere E sotto

(39) Ex. se prendo una sfera

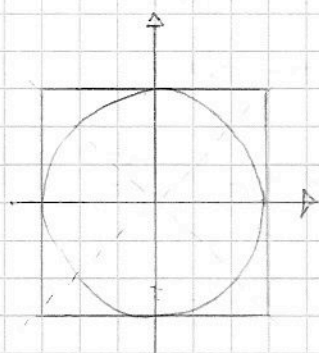


Quindi da prima:

$$x = x + k(x_2 e_1 + x_1 e_2)$$

$$F = 1 + \nabla u$$

$$\nabla u = k \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightsquigarrow |\mathbb{E}| = \begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Per trovare gli autovalori:

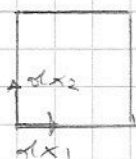
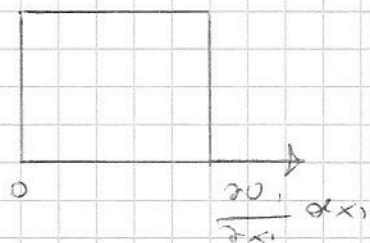
$$(\mathbb{E} - \lambda I) v = 0 \rightsquigarrow \det(\mathbb{E} - \lambda I) = 0$$

↳ minimizzare la var. di volume dei cubi

Da prima:

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & k & 0 \\ k & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - k^2) = 0$$

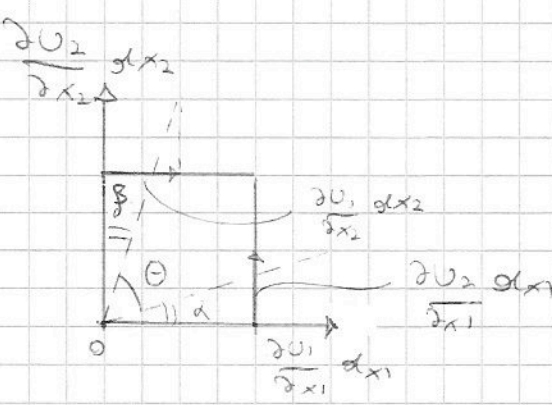
Es:



$$\begin{aligned} x &= p(x) = p(0 + dx) \\ &= p(0) + \nabla p \cdot dx \end{aligned}$$

Per tutte le

direzioni.



$$\Theta = \frac{1}{2} - (\alpha + \beta) = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right)$$

$$E = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \rightarrow \text{gli effetti fuori diagonale indicano variazioni angolari}$$

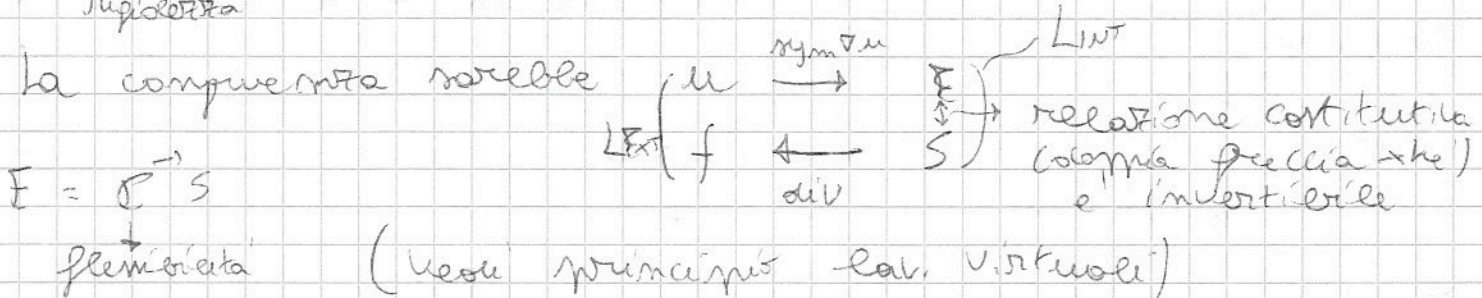
6/3/08

PROBLEMA ELASTICO LINEARE

- 1) Mi serve il corpo B
- 2) Incognita problema: moto del corpo $x = p(x) = x + u(x)$, si cerca in genere lo spost. u e uno può vedere la config deformata.
- 3) E [Componente] $E = \text{sym} \nabla u$ + conditione contorno cinematiche $u = \bar{u}$

$$\underbrace{\text{div } S}_{\text{entrano solo } \sigma} + f = 0 \quad \text{in } B + \text{C.C.d. [Bianchi]} \quad S_m = t$$

5) Relazione costitutiva
 $S = \mathbb{C} E$ materiale elastico lineare
 \downarrow
 rigidezza



$\mathbb{C}: \text{Sym} \rightarrow \text{Sym}$, lineare
 $E \mapsto S$

Piu formalmente:

(41) $C: B \rightarrow \text{Lin}(\text{Sym})$
 $x \rightarrow C(x)$

σ, ϵ, C sono $5 \times 5, C$ ha 6 termini quindi sono
 risolte 36 equazioni: $\dim(\text{Lin}(\text{Sym})) = 36$

Energia elastica:

$\dot{\varphi}$ = Potenza

$$\varphi = \frac{1}{2} C E \cdot E \rightarrow \dot{\varphi} = (C E \dot{E} + C E \dot{E}) / 2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} S \cdot \dot{E}$$

$$\dot{\varphi} = \underbrace{(C^T E + C E)}_2 \cdot \dot{E} = \underbrace{(C E)}_{\rightarrow S} \cdot \dot{E}$$

(con $C \text{ Sym}$)

Quindi $\dim(\text{Sym}(\text{Sym})) = 21$

RAPPRESENTAZIONE DI VOIGT

$$\begin{vmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{vmatrix}$$

Sym

$$S_m = f \times \begin{matrix} \nearrow \\ \nwarrow \end{matrix}$$

Materiali isotropi:

$$S = 2\mu E + \lambda (\text{tr} E) I \quad \text{con}$$

$$\lambda = \frac{\nu \gamma}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

λ, μ : costanti di Lamé

γ : modulo di Young

ν : " " Poisson

$$2\mu = \frac{\gamma}{1+\nu}$$

$$[C] = \frac{\lambda}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} \\ 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix}$$

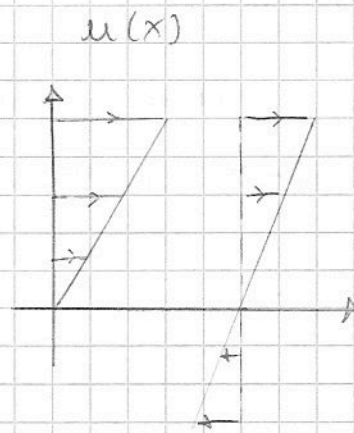
Facile da invertire:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2\mu} \left(s - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} (t s) I \right)$$

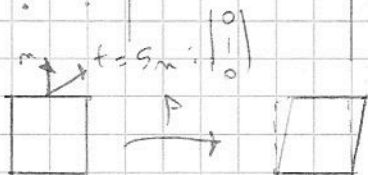
Cosa significano μ e λ !

$$x = \mu(x) = x + u(x) \\ = x + \gamma x_2 e_1$$

$$[\mathbb{E}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \gamma & \cdot & \cdot \\ \gamma & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad [T] = \begin{vmatrix} \mu\gamma & \cdot & \cdot \\ \mu\gamma & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$



Quindi



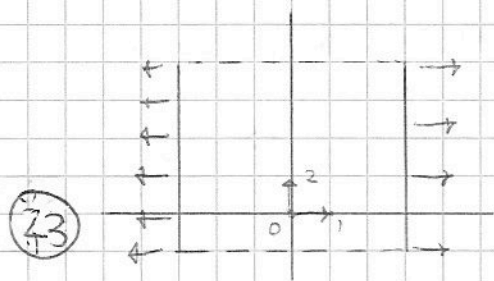
Voglio le f. che l'hanno generato:

$$t = s_m \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \downarrow \square \uparrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Il modulo la risposta al taglio, risposta al
 $s_{12} = \mu E_{12}$ variare degli angoli retti.

Estensione:

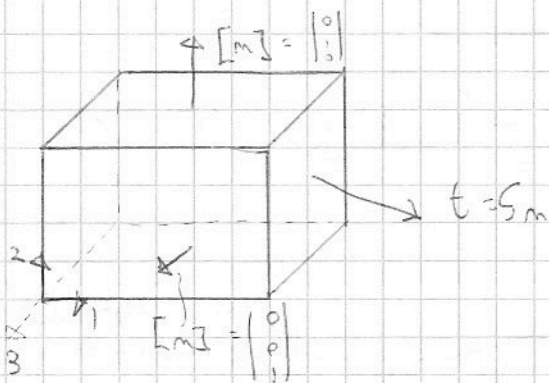
$$x = x + \alpha x_1 e_1$$



$$[\mathbb{E}] = \begin{vmatrix} \alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$[S] = 2\mu \begin{vmatrix} \alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2\mu+\lambda)\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda\alpha & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda\alpha \end{vmatrix}$$

Devo tirare tutti i lati del cubo



$$\begin{vmatrix} (2\mu+\lambda)\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda\alpha & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma \\ \cdot \\ \cdot \end{vmatrix}$$

X e' massima rigidezza extensionale

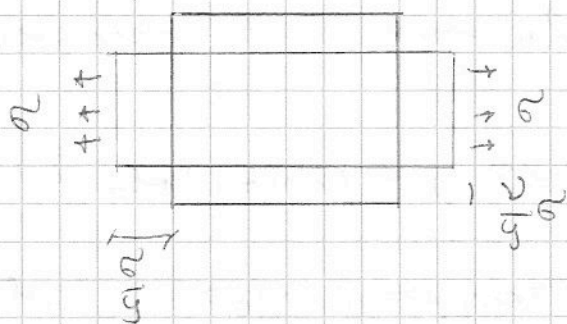
Trazione semplice

$$[e] = \begin{vmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$[S] = \begin{vmatrix} \sigma & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \text{Sostanza e} \quad \text{div } S = 0 \quad \text{se } \sigma \text{ e' costante}$$

$$E = C^{-1} S$$

$$[E] = \begin{vmatrix} \sigma/\epsilon & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{\nu}{\epsilon} \sigma & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\frac{\nu}{\epsilon} \sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma/\epsilon & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\nu & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\nu \end{vmatrix}$$

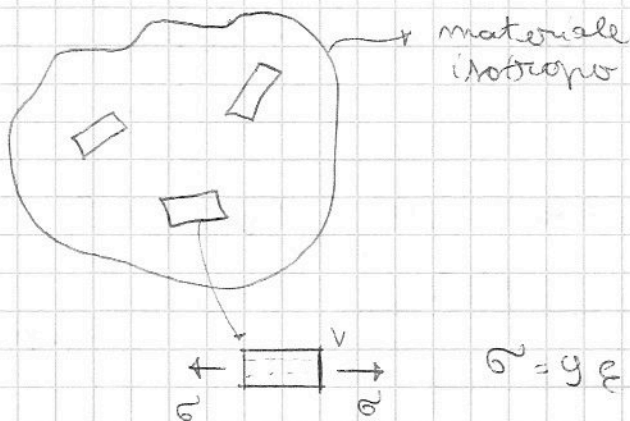


$$S = \mathbb{C} E$$

2D: (tensione piano)

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & \cdot \\ b & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{bmatrix}$$

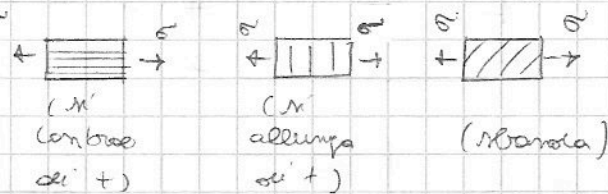
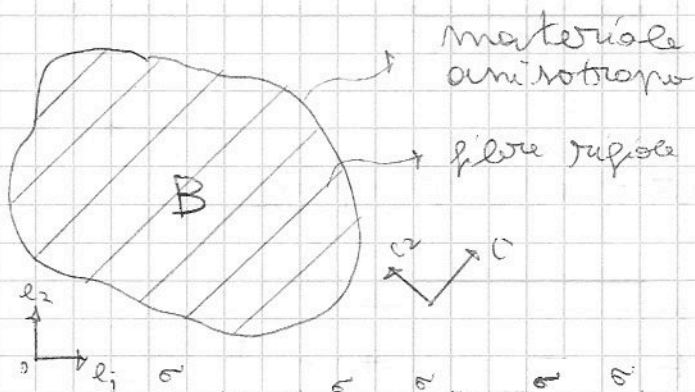
↳ materiale isotropo



$\mathbb{C} =$
in base
 e_1, e_2

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} a & b & \cdot \\ b & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

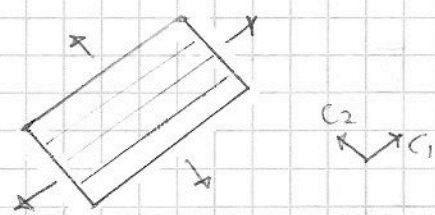
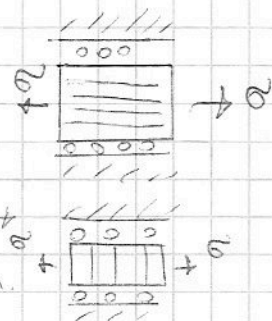


Devo trovare $S = \mathbb{C} E$, scelgo una base orientata con

le fibre rigide, e_1 e e_2 .

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & \cdot \\ b & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{bmatrix}$$

Il rig. deve essere sym.



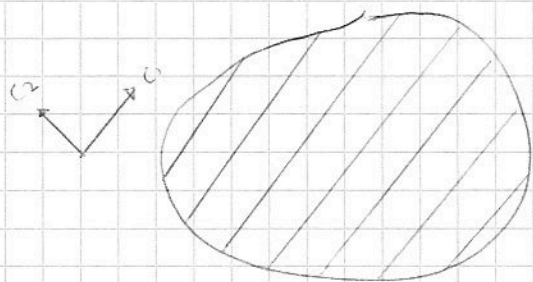
1) Per gli isotropi non indico la base in \mathbb{C} essendo indipendente.

2) I moduli elastici a, b, c a da $\gamma \delta \nu$ (non solo 2!)

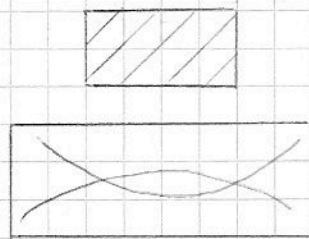
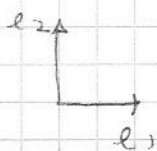
45) 1) Per gli anisotropi la rappresentazione di

\mathbb{C} dipende dalla base

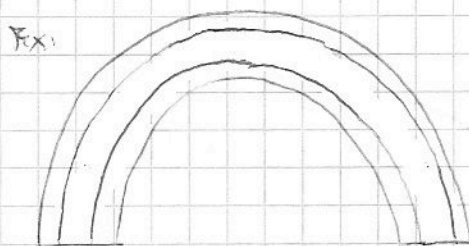
2) I moduli elastici sono 3



Ma in serie
una rappresentazione
in base



$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline S_{11} & & & E_{11} \\ \hline S_{22} & = & \mathbb{C}_f & E_{22} \\ \hline S_{12} & & & E_{12} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} e \\ e \\ e \end{array}$$

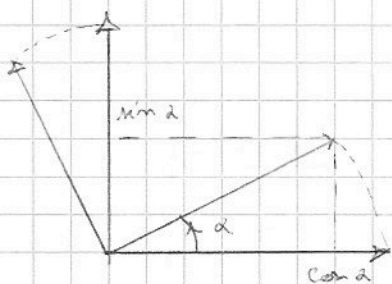


CAMBIO DI BASE (rotazione)

$$|R| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Quindi



$$S = R \left(\mathbb{C}_f (R^T E R) \right) R^T = \mathbb{C} E$$

↓
rappresentazione di \mathbb{C}_f nella
base e_1, e_2

$$S_c = \mathbb{C}_f E_c$$

$$E_c = R^T E R \quad (\text{"giro" } E)$$

$$S = R S_c R^T \quad (\text{"surgiro" } S_c)$$

$$E_{x1}: \quad A u = \bar{u} \quad \bar{u} = (2u)$$

$$A \bar{u} = \bar{u}$$

Combinando base canonica

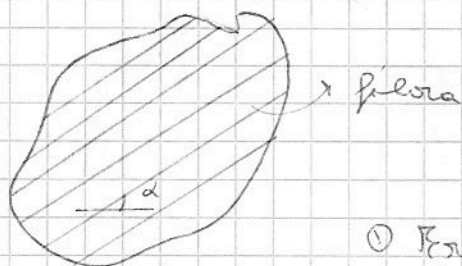
la rapp. di U .

Q è un cambio di base, quindi $\bar{A} Q U = Q U \Rightarrow Q^T \bar{A} Q U = U \Rightarrow A = Q^T \bar{A} Q$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \left| \begin{array}{cc|cc} C & -S & C & S \\ S & C & -S & C \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} C^2+S^2 & & & \\ & C^2+S^2 & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right| \\ \left. \begin{array}{cc} R & R^T \end{array} \right\} \end{array}$$

\hookrightarrow è proprio una rotazione e una traslazione

18/3/08



$$S = R \left(\underbrace{C_R R^T F_R}_{\textcircled{1} F_R} \right) R^T = C(\alpha) F$$

$$\textcircled{2} S_R = C_R F_R$$

$$\textcircled{3} S = R S_R R^T$$

\hookrightarrow primo fase $\langle \rangle$ prove
al variare inclinazione
fibra

Studio un problema con i seguenti parametri:

1) 2D

2) B, corpo

3) Variabili di stato $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$4) F = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \text{ (pinica)} \rightarrow |F| = \begin{vmatrix} u_x & \frac{u_y + v_x}{2} \\ sym & v_x \end{vmatrix}$$

$$5) \text{ Eq. bilancio } \underbrace{-S \cdot \nabla \tilde{u}}_{\text{Subdomain settings}} + \underbrace{f(\tilde{u})}_{\text{test}(u)} + \underbrace{\int_{\partial \Omega} t \cdot \tilde{u}}_{\text{lavoro f. al bordo}} = 0 \quad \forall \tilde{u} \rightarrow \text{come funziona con (Physicist)}$$

Subdomain settings
(Weak)

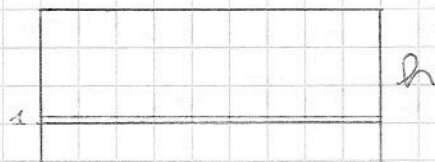
test(u) lavoro f. al bordo
(boundary settings)

\times controllare forza in "Weak" assegno $f \cdot \tilde{u}$ [forza \cdot test(u)]

47 \times , spost in "Cottor" " -u + v

\mathbb{R} in \mathbb{C} e in \mathbb{R} definiamo \tilde{u} e \tilde{v} .

\mathbb{R} in \mathbb{C} e in \mathbb{R} definiamo \tilde{u} e \tilde{v} .



DEFINIZIONE F.E.M.

27/3/08

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} \quad \text{o anche} \quad ax \cdot \tilde{v} = b \cdot \tilde{v} \quad \forall \tilde{v}$$

\exists sol? Solo se $\det a \neq 0$. (infatti $x = a^{-1}b$)

$$\det a = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \text{ogni } x \text{ va bene}$$

(qualcuno a la "a", abbiamo "b" e x ha x)

Se ho.

$$Ax \cdot \tilde{v} = b \cdot \tilde{v} \quad \forall \tilde{v} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ A & x & \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ b & \tilde{v} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{x} \approx x$$

(basta alle equazioni,
prodotto con \tilde{v} e \tilde{v})

Idea e' ho la forma FORTE ($Ax=b$) e la f.
DEBOL ($Ax \cdot \tilde{v}$) che sono \equiv se \tilde{v} \forall \tilde{v}
completo, e appross se \tilde{v} parziale.

$$\int_B -S \cdot \nabla \tilde{w} + f \cdot \tilde{w} + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{w} = 0 \quad \forall \tilde{w}$$

Demo trovare u che la soddisfa / $S = \mathbb{C} \nabla u$.

$$\text{div } \mathbb{C} \nabla u + f = 0 \quad \text{in } B$$

$$(\mathbb{C} \nabla u) \cdot n = t \quad \text{in } \partial B$$

$$\text{la cui soluzione e' } u = - \left(\text{div } \mathbb{C} \nabla \right)^{-1} f$$

(la div e' un operatore lineare differenziale)

Nella f. debole ho funzioni, \tilde{w} e' vettore, u
e' campo vettoriale e qui noi ho ∞^3 incognite.

Se metto tutti i \tilde{w} , f. deb. = f. forte

Da spazi con ∞^3 incognite prendo un sottospazio con un numero finito di gradi di libertà (che è la richiesta del software fem). Nella f. debole ci sono + soluzioni che nella forte che la u ha solo 1 soluzione.

$U = \text{cost}$ \rightarrow muove in f. deb. e in f. forte

$U = \text{cost} + dx$ \rightarrow " in f. forte ma vive in f. debole

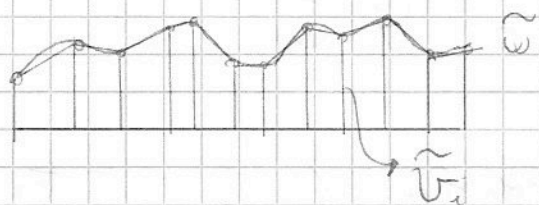
$U = \beta + dx + \gamma x^2 + \dots$ vive

F. lineare a tratti non possono stare in f. forte. F. debole funziona MEGLIO.

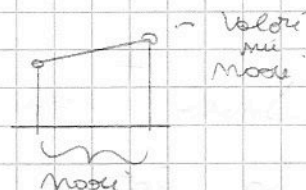
\rightarrow ELEMENTI FINITI: cercare le soluzioni del problema debole in un sottospazio di dimensione finita. Es. scalpo $7 \cdot 10^9$ inc. al posto di ∞^3 .

$\tilde{U}(x) = \underbrace{B(x)}_{\text{funzioni di forma}} \underbrace{\tilde{U}}_{\text{forma compatta}} \rightarrow$ gradi di libertà

Es:

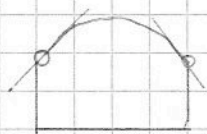


Ho campo qualunque \tilde{U} ma lo rapp. con f. di forma.



Generalizzabile al 2D e 3D.

Poss. con f. parabolica fissare oltre al valore anche la tangente. Ho 1 nodo con 2 p.a.l.



Poss. direttamente cercare la soluzione di $u(x) = B(x) \cdot \tilde{U}$ (ci sono molte eq. che non controllo più)

(43) Devo trovare \tilde{U} tale che (N valori).

$$\int_B \mathbb{C} \nabla B(x) \bar{u} \cdot B(x) \tilde{u} + f(x) \cdot B(x) \tilde{u} = 0 \quad \forall \tilde{u}$$

Per risolvere eq. in forma forte solo mettere in evidenza campo test.

$$\int_B \left[-(\nabla B(x))^T \mathbb{C} \nabla B(x) \bar{u} + B^T(x) f(x) \right] \cdot \tilde{u} = 0 \quad \forall \tilde{u}$$

La matrice di rigidezza e' quindi:

$$K = \int_B (\nabla B(x))^T \mathbb{C} \nabla B(x) dV$$

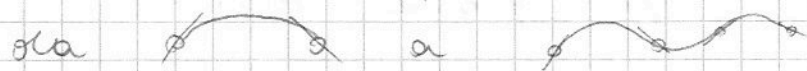
$$F = \int_B B(x) f(x) dV$$

$$K \bar{u} \cdot \tilde{u} = F \cdot \tilde{u} \quad \forall \tilde{u} \quad (N \text{ dimensionale})$$

La sol. del problema p.e. e' $\bar{u} = K^{-1} F$, \bar{u} tale che \rightarrow alla $u(x)$, soluzione di:

$$\int_B \mathbb{C} \nabla u \cdot \nabla \tilde{u} + f \cdot \tilde{u} = 0 \quad \forall \tilde{u}(x)$$

Quando n ingrossa il reticolo \uparrow : p.e. , ex,



H

Implementazione elasticita' non lineare.

Trovare u tale che:

$$B_1$$

lineare

$$\text{div } S + f = 0 \rightarrow S = \mathbb{C} E ; E = \text{Sym} \nabla u$$

$$B_2$$

non lineare

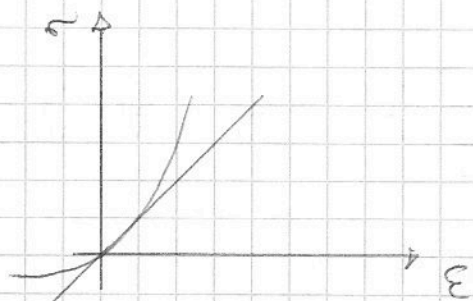
$$\text{div } S + f = 0 \rightarrow S_1 = \mathbb{C} D ; D = E + \frac{1}{2} \nabla u^T \nabla u$$

$$S = F S_2$$

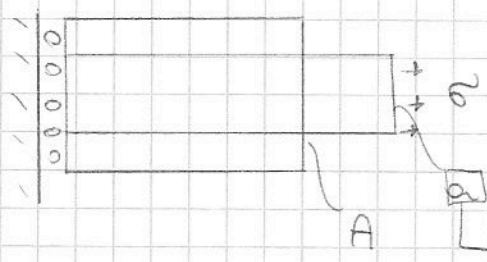
\Rightarrow Conosci forma e lo stato di sollecitazione (LIN)

\Rightarrow " " , ma $T = T(S) = \frac{1}{\det F} S \cdot F^T$ (Non LIN)

Ex:



Legame lineare anche con deform.
 ∞ continuo a valore



$$R = \int_a \sigma \, da = \int_A \sigma^* \, dA$$

$|F^* m|$ minima come varia l'area.

Bilancio:

03/4/08

$$\int_B -S \cdot \nabla \tilde{u} + f \cdot \tilde{u} + \int_{\partial B} t \cdot \tilde{u} = 0 \quad \forall \tilde{u}$$

$f = \begin{cases} f_0 & \text{lin.} \\ \det F \cdot f_0 & \text{non lin (spost. grandi, volume)} \\ & \text{(camerale)} \end{cases}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} U \\ R \end{pmatrix}$$

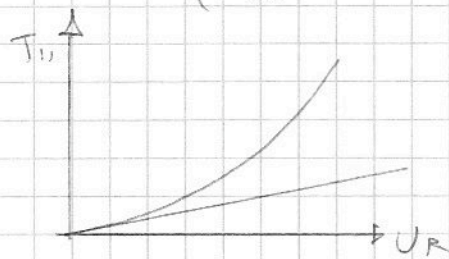
Entre info cinematica, esce
reat. vincolare (dinamica)

$f=0$, e carico che noi diamo, controlliamo lo spostamento. S_m su la forza che agisce sulla faccia.

$$\textcircled{51} \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad R = \int_A S_m \, dA \quad (\text{Molare})$$

Voglio legame $\sigma - \epsilon$ (T_{11})

$$T = \begin{cases} S & \text{lin} \\ \frac{1}{\det F} S F^T & \text{non lin} \end{cases}$$



→ in realtà

Voglio la deformazione (E_{11}) $E = \frac{L - L_0}{L_0}$

$$= \frac{2 + U - 2}{2} = \frac{U}{2}$$

$$R = \int_{\partial B} t \, dA \quad (\text{lin}); \quad R = \int_{\partial P(B)} t \, da \quad (\text{non lin})$$

Anche se t e' la stessa le R sono <>.

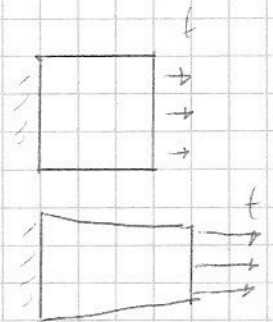
Se voglio controllare il carico, $t =$

$$\begin{cases} \frac{R}{\text{Area } \partial B} & \text{lin} \\ \frac{R}{\text{Area } \partial_{\Pi} B} & \text{non lin} \end{cases}$$

$$\text{Area } \partial_{\Pi}(B) = \int_{\partial B} |F^* n| \, dA$$

$$F = I + \nabla u \rightarrow |\det F (F^{-T}) n|$$

Voglio vedere a posteriori stessa risultante:



FINE CORSO (03/4/2008)